UNA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA PARA LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

A DIDACTIC OF MATHEMATICS FOR RESEARCH IN ADVANCED MATHEMATICAL THINKING

Eliécer Aldana Bermúdez[1]

eliecerab@uniquindio.edu.co

Recibido: 5 de julio de 2013
Aceptado para su publicación: 4 de octubre de 2013

RESUMEN

La ponencia que aquí se presenta tiene como objetivo analizar en el marco de la educación matemática y desde una didáctica de la matemática, las perspectivas teóricas de investigación más utilizadas en el campo del pensamiento matemático avanzado. En primer lugar se pretende hacer algunas precisiones conceptuales en torno a lo que aquí se entiende por educación matemática y su relación con la didáctica de la matemática, y en segundo lugar se discuten algunos marcos teóricos de investigación en educación matemática que tienen que

ABSTRACT

The presentation that here one presents has as aim analyze in the frame of the mathematical education and from a didactics of the mathematics, the theoretical perspectives of investigation more used in the field of the mathematical advanced thought. First one tries to do some conceptual precisions concerning what here he understands himself for mathematical education and his relation with the didactics of the mathematics, and secondly some theoretical frames of investigation are discussed in mathematical education that they have to see with the cognitive processes typical of

[1]Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Salamanca España. Profesor Universidad del Quindío, Armenia Colombia.

ver con los procesos cognitivos característicos del pensamiento matemático avanzado.

the mathematical advanced thought.

Palabras claves: Educación matemática, didáctica de la matemática, perspectiva teórica, procesos cognitivos, pensamiento matemático avanzado

Keywords: mathematical, didactic Education of the mathematics, theoretical perspective, and cognitive processes, mathematical advanced thought.

INTRODUCCIÓN

Este estudio tiene una perspectiva teórica de investigación en educación matemática en el campo del pensamiento matemático avanzado (PMA), por tanto se considera necesario en primer lugar hacer algunas precisiones conceptuales en lo relacionado con lo que vamos a entender por educación matemática, y su relación con la didáctica de la matemática.

En este sentido, los educandos y de todas las edades adquieren parte importante de su herencia cultural por medio de un sistema social de formación organizado, llamado sistema educativo. Las matemáticas hacen parte de esa cultura que se transmite a través del sistema educativo y son parte esencial de la formación básica que deben recibir y compartir todos los ciudadanos de un país. Por tanto es pertinente en nuestro contexto hablar de educación matemática. La educación matemática abarca desde las primeras nociones que se le enseñan a un escolar, hasta su culminación en una formación profesional o en estudios superiores.

DESARROLLO

Rico y Sierra (2000, p. 77-131), consideran la educación matemática como conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general de actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional, y que se propone dar respuesta a los problemas y necesidades derivados de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Estos mismos autores plantean que la educación matemática presenta tres ámbitos de actuación:

- **Educación matemática como conjunto de conocimientos:** Conocimiento matemático como objeto de enseñanza aprendizaje, diseño, desarrollo y evaluación del currículo de Matemáticas.

- **Educación matemática como actividad social:** Conocimiento profesional y formación del profesor de Matemáticas.

- **Educación matemática como disciplina científica**: Didáctica de la Matemática.

Es decir que cuando hablamos de educación matemática hacemos referencia a un objeto matemático de estudio, a un profesional dedicado socialmente a la formación matemática y a una ciencia que le ofrece las herramientas necesarias para que el docente resuelva los problemas que se le presentan en el aula de clase.

En este sentido, la didáctica de la matemática es la ciencia que se ocupa de estudiar e investigar los problemas de la educación matemática y proponer marcos explicativos para su resolución. Indaga metódica y sistemáticamente los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, y los planes de formación de los educadores matemáticos. Tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático junto con su propia fundamentación teórica.

En segundo lugar, para referimos al PMA, tenemos que comprender los procesos cognitivos que subyacen a este tipo de pensamiento en los estudiantes. A lo largo de este artículo se hará una breve exposición de las principales características del PMA, y de algunos marcos teóricos de investigación que en educación matemática han sido objeto de estudio desde este campo del pensamiento matemático. El PMA tiene que ver con los procesos mentales propios de las matemáticas superiores que se enseñan y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en especial en el ámbito universitario (Aldana, 2011, p. 58).

Asimismo Azcárate y Camacho (2003, p. 136-141), ponen de manifiesto que este tipo de pensamiento por su naturaleza posee unos procesos característicos entre los que destaca: el nivel de abstracción, formalización del conocimiento, la representación, definición de los conceptos y la demostración; además afirman que aunque no es posible establecer claramente una distinción entre las matemáticas elementales y las avanzadas, si se pueden indicar algunos rasgos característicos, uno de los cuales es la complejidad de los contenidos y la forma de controlarla; los procesos más potentes son aquellos que permiten este control, en especial la representación y la abstracción, y además establecen “que en las matemáticas elementales los objetos se describen, mientras que en las avanzadas estos objetos matemáticos se definen”.

De otra parte Dreyfus (1991, p. 25-41), afirma que "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Cuando hacemos referencia a procesos cognitivos implicados en el PMA, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que se destaca el proceso de abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos organizados en la mente. No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Las investigaciones de tipo cognitivo están interesadas en estos procesos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos, donde es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógico-formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática; se puede incluso afirmar que es frecuente que ésta presentación lógica ofrezca obstáculos cognitivos al estudiante.

En este sentido, algunos de los modelos cognitivos que se utilizan en la investigación de los procesos involucrados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, como son los implicados en el Análisis Matemático; estos modelos son distintas formas teóricas de describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y los procesos de construcción del mismo.

En relación con estos modelos cognitivos, uno de ellos, es el que tiene que ver con la memoria del estudiante cuando evoca algo que generalmente no es la definición del concepto, sino lo que se denomina *concept image* (imagen del concepto), que consiste en “toda la estructura cognitiva de un sujeto asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto. Se construye a lo largo de los años por experiencias de toda clase y va cambiando según el individuo madura y encuentra nuevos estímulos” (Tall y Vinner, 1981, p. 152). Esta imagen del concepto está formada por representaciones visuales, recuerdos de experiencias con el concepto y registro de ejemplos. La imagen del concepto, es entonces, toda la estructura cognitiva asociada a una noción matemática, aunque no sea necesariamente coherente en todo momento ya que los estudiantes pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes. Una imagen mental (Azcárate y Camacho, 2003) es el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente del sujeto, incluyendo cualquier tipo de representación del concepto matemático que puede ser gráfica, numérica, o simbólica entre otras. En cambio, la *definición del concepto*, se refiere a “una definición verbal, a un conjunto de palabras para especificar un concepto” (Tall y Vinner, 1981, p. 152).

Asimismo, cuando un estudiante se enfrenta a una tarea con relación a un concepto matemático, generalmente esperamos que la definición sea activada para que le ayude en la resolución de la tarea, sin embargo, eso no es lo que suele ocurrir. Usualmente el estudiante no utiliza la definición y responde de acuerdo a su imagen del concepto. El carácter, adecuado o no, de las imágenes, propiedades y procesos que integran la imagen del concepto puede llevar a la aparición de errores e inconsistencias. El conflicto entre la imagen del concepto y la definición del concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera comprensión del concepto por parte del alumno. En este sentido, Aldana (2011) pone de manifiesto que adquirir un concepto significa tener una imagen conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones, además, de tener un dominio de la complejidad y construcción del concepto, porque muchos alumnos recuerdan de memoria la definición de un concepto producto de la instrucción previa pero cuando tienen que utilizarlo no saben cómo hacerlo o lo hacen de forma errónea.

Otro de los modelos cognitivos es el que tienen que ver con el paso de proceso a objeto cognitivo, que como indican Azcárate y Camacho (2003), la complejidad del conocimiento matemático superior, es que, en su mayoría, los conceptos del PMA, pueden jugar el papel de procesos y de objetos, según la situación planteada o el nivel de conceptualización que tenga el alumno. En este mismo aspecto cognitivo sobre la construcción de los objetos matemáticos, Tall (1991), y Gray y Tall (1994), hacen planteamientos para determinar los procedimientos o procesos de las nociones matemáticas mediante un simbolismo de naturaleza dual que sirva para referirse tanto al procedimiento como al concepto. Además, indican que la ambigüedad simbólica permite la flexibilidad entre el proceso para llevar a cabo una tarea matemática y el concepto que se va a manipular intelectualmente como parte del esquema mental del individuo, que ellos denominan “procepto”. El término “procepto” lo definen para referirse a la combinación tanto del proceso y del objeto utilizando el mismo símbolo.

Al respecto, Sfard (1991), señala que los conceptos matemáticos abstractos pueden ser concebidos desde dos perspectivas. Una como concepciones operacionales (procesos, algoritmos y acciones) y otra como concepciones estructurales (conceptos matemáticos considerados objetos abstractos), donde las concepciones operacionales son previas a las concepciones estructurales. El paso de las concepciones operacionales a las estructurales se realiza a través de las tres fases siguientes: Interiorización, condensación y reificación.

- **Interiorización**, es la fase en la que el estudiante se familiariza con los procesos que darán lugar al nuevo concepto. Estos procesos son operaciones con objetos matemáticos de nivel elemental y que se van construyendo de forma gradual, en la medida que el sujeto va adquiriendo las habilidades propias de dichos procesos.

- **Condensación,** es un periodo de cambio en el que se concentran largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. Aquí, el estudiante se siente capaz de pensar en un proceso dado como un todo, en términos de entrada y salida, sin necesidad de considerar todos los detalles que lo componen. En esta fase se puede dar nombre al concepto que nace, se hace más factible combinar procesos, hacer generalizaciones y aumentar las posibilidades de hacer representaciones del concepto. Este periodo dura mientras la nueva entidad permanece ligada a un cierto proceso.

- **Reificación,** es el momento en que el estudiante es capaz de pensar en la nueva noción como un objeto en sí mismo con sus propias características. La reificación se define en términos más generales como un cambio ontológico, una habilidad repentina para ver algo familiar con una perspectiva totalmente nueva.

En este panorama teórico, otro de los modelos cognitivos de investigación acerca del conocimiento matemático superior, está la teoría de las representaciones semióticas, desarrollada por Duval (1996, 1999). Este investigador indaga sobre si los medios estructuralmente requeridos para que el sujeto pueda acceder a los objetos del conocimiento matemático son diferente, o no, a los medios requeridos para acceder a los otros objetos de conocimiento (por ejemplo en botánica, astronomía, química, historia,…), comprueba lo siguiente:

- Los objetos matemáticos, no son objetos reales, como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables. “De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría".

- La necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa).

Duval, considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.), se entiende por cambio de registro de representación "a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico". Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función. Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos. Además de los modelos cognitivos anteriores, existe el de la teoría **APOS** de ***A****ction*, ***P****rocess*, ***O****bject*, ***S****chema.* La teoría APOE, desarrollada por Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores de **R**esearch in **U**ndergraduate **M**athematics **E**ducation **C**ommunity (**RUMEC**), está basada en una interpretación del constructivismo a partir de la adaptación de algunas ideas del enfoque cognitivo de Piaget al PMA. Una de estas ideas es la de **"Abstracción Reflexiva"** introducida por Piaget para describir como construyen los individuos las estructuras lógico – matemáticas. (Piaget y García, 1982, p. 10) definen la abstracción reflexiva, como "el mecanismo por el cual el individuo se mueve de un nivel a otro".

Dubinsky (1991) afirma que el concepto de "abstracción reflexiva" constituye una poderosa herramienta que dota a los investigadores de una base teórica sólida para la comprensión del desarrollo del PMA. En este sentido, Dubinsky (1991, 1996) considera que la principal dificultad para aplicar las ideas de Piaget al PMA, ha sido que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, y manipularlos para construir las ideas matemáticas. Considera que un problema importante en la Educación Matemática consiste en encontrar sustitutos apropiados para los objetos físicos y cree que los entornos informáticos pueden servir para este propósito. Además piensa, que para explicar las diferencias en las conductas de los estudiantes, es necesario formular hipótesis de tipo mental, ya que para poder explicar y buscar soluciones a estas diferencias, es necesario desarrollar una teoría sobre los procesos mentales, que pueda explicar lo que está ocurriendo en la mente de los estudiantes.

Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991, 2000), y Asiala (1996) consideran que los individuos realizan construcciones mentales para obtener significados de los problemas y situaciones matemáticas; estas construcciones mentales son desarrolladas y controladas por unos mecanismos de construcción, y que según DeVries (2001), citado por Aldana (2011), se caracterizan como sigue:

- **Acción,** es la transformación de un objeto percibida por el estudiante como externa. La transformación se produce como una reacción a una indicación que ofrece información sobre los pasos a seguir. Cuando un sujeto sólo puede realizar este tipo de transformaciones en la resolución de una tarea, decimos que está operando a nivel de acción.

- **Proceso**, es la interiorización de una acción. Es una construcción producto de una transformación interna, no necesariamente dirigida por un estímulo externo. En el proceso el sujeto puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso puede invertirlos, es decir, tiene más control de la transformación.

- **Objeto**, es cuando el estudiante reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso concreto, siendo consciente del proceso como una totalidad, aprecia que la transformación (acción o proceso) puede actuar sobre él y es capaz de construir la transformación. Entonces, se dice que el estudiante ha reconstruido este proceso en un objeto cognitivo; es decir que el proceso ha sido "encapsulado" en un objeto.

- **Esquema**, es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la mente del individuo y que puede ser evocada para tratar una situación problemática de esa área de la Matemática. Una función importante y característica de la coherencia de un esquema está en poder determinar qué está en el ámbito del esquema y qué no.

La descripción sobre el desarrollo de un esquema, ha sido utilizada en distintas investigaciones a partir de la teoría APOE de Dubinsky (Bodi, 2006; Sánchez – Matamoros, 2004), entre otros. DeVries (2001), también adapta los niveles de desarrollo de un esquema de la siguiente manera:

- **Nivel intra**, se identifica por centrarse en aspectos individuales aislados de acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. El individuo no ha construido ninguna relación entre ellos. Así por ejemplo, un sujeto entiende el concepto de Integral Definida a nivel intra, cuando no establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, porque los recuerda de manera aislada, muestra concepciones erróneas en el uso de algunos elementos y establece sólo un intento de conjunción entre los elementos.

- **Nivel ínter**, se caracteriza por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. En este nivel se comienzan a agrupar las informaciones de naturaleza similar. En el concepto de Integral Definida, asumimos que el alumno tiene un pensamiento a nivel inter, porque comienza a establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos especialmente la conjunción lógica entre los elementos cambiando de sistema de representación, establece además de la conjunción lógica la condicional y aparecen los primeros comienzos de síntesis entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

- **Nivel trans**, se adquiere cuando se tiene construida una estructura subyacente completa en la que las relaciones descubiertas en el nivel inter son comprendidas dando coherencia al esquema. En nuestra investigación concebimos que un alumno manifiesta un nivel trans de desarrollo del esquema de Integral Definida, cuando establece varias relaciones lógicas (conjunción, condicional y contrario de la condicional) entre los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos, utiliza los elementos necesarios en la resolución de las tareas usando los significados implícitos para tomar decisiones, y establece una síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Las abstracciones reflexivas utilizadas para realizar las construcciones mentales se denominan mecanismos y han sido caracterizados por el grupo de investigadores RUMEC de la siguiente forma:

- **Interiorización**, es la construcción mental de un proceso que tiene que ver con una serie de acciones sobre objetos cognitivos. Las acciones se interiorizan en procesos.

- **Coordinación,** es el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso. Piaget (1978), (citado por Dubinsky, 1991) usa "coordinaciones de acciones" para referirse a todas las formas de usar una o más acciones para construir nuevas acciones u objetos.

- **Inversión**, una vez que el proceso existe internamente, al sujeto le es posible invertirlo, en el sentido de deshacerlo, para construir un nuevo proceso original. Piaget (1978), según Dubinsky (1991), no lo trata en el contexto de la abstracción reflexiva, lo incluye como una forma de construcción adicional.

- **Encapsulación,** es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado mentalmente por otras acciones o procesos. En este caso decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo.

- **Desencapsulación,** es el proceso mental de volverse desde un objeto al proceso desde el cual fue encapsulado el objeto o tuvo su origen.

- **Tematización**, es la reflexión sobre comprensión de un esquema, viéndolo como "un todo", y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto, Asiala (1996). En relación con este mecanismo, (Piaget y García 1982, p. 103), definen la tematización como: "el paso del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización".

El resultado de éste análisis teórico es lo que se denomina la *descomposición genética del concepto* (Asiala, 1996). El análisis se basa principalmente en:

- la comprensión que tienen los investigadores sobre el concepto en cuestión y en sus experiencias como aprendices y profesores del mismo.
- Investigaciones previas sobre el concepto.
- Observaciones de los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto estudiado.

Una descomposición genética está definida como un modelo cognitivo donde se describen las posibles construcciones mentales que un estudiante realiza para entender un concepto a partir de ciertas habilidades cognitivas previas, y que son descritas en el marco de la teoría APOE de Dubinsky (1996) y Asiala (1996), donde se trata de explicar el entendimiento de un concepto mediante las construcciones mentales y los mecanismos de construcción.

La descomposición genética es una vía para aprender conscientemente un concepto matemático por parte del alumno, pensando que la descomposición genética de un concepto no es única; y que "pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto en estudio" (Trigueros, 2005, p. 8).

CONCLUSIONES

Cada uno de estos enfoques teóricos describen de manera epistémica lo que es una didáctica de la matemática para la investigación en pensamiento matemático avanzado, porque una de las características fundamentales de la construcción de objetos matemáticos en el pensamiento matemático avanzado es el paso de proceso a objeto cognitivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de Integral Definida en el marco de la teoría "APOE". Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca, España.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1 – 32.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*, 2, 135-149.

Bodí, S.D. (2006*) Análisis de la Comprensión de Divisibilidad en el Conjunto de los Números Naturales*. Tesis Doctoral. Universitat d` Alacant.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / APOS Theory *Glossary. Georgia Collage & StateUniversity.Milledgeville.http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.hl*. [Disponible el 18 de agosto de 2008]

Dreyfus, T. (1991). Advanced in Mathematical Thinking Processes. En D. Tall. (Ed.). *Advanced in Mathematical Thinking* (pp.25–41). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la Perspectiva Piagetana a la Educación Matemática Universitaria. *Educación Matemática, 8, 3,* 24-41.

Duval, R. (1996). ¿Quel cognitive retenir en didactique des mathemátique? *Recherches* *en Didáctique des mathemátique, 6,* 3,349-382*.*

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. Actas for PME 23, 3-326.

Fard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflexions on Processes and Objects as Different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22,* 1 – 36.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A perceptual view of simple Arithmetic's, *Journal for Research in Mathematics Education*, *26, 2,* 115– 141.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). Psicología del Niño. Madrid, 8ª Edición: Ediciones Morata.

Piaget, J.; García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia. (Madrid): Siglo XXI.

Rico, L. y Sierra, M. (2000).Didáctica de las matemáticas e investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (eds.). Matmática española en los albores del siglo XXI (p. 77-131). Huelva: Hergué.

Sánchez-Matamoros, G. M. (2004). *Análisis de la Comprensión en los Alumnos deBachillerato y Primer año de Universidad sobre la Noción de Derivada (desarrollo del concepto).* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Tall, D. (1991). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the XXIII Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 1, (pp. 111 – 118). Haifa.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12,* 151-169.