UTILIZACIÓN DE PARADOJAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CARRERAS DE INGENIERÍA

USE OF PARADOXES IN THE TEACHING OF MATHEMATICS IN ENGINEERING CAREERS

Ing. Lians Alfonso Roque[1,] (0000-0002-1643-7114), Universidad de Matanzas,

lians.alfonso@umcc.cu

Dr. C. Francisco David Ramirez Betancourt[2,] (0000-0002-3683-8126)

Ing. Sonia González Silva[3,] (0000-0002-9222-4129)

M. Sc. Alfredo Santamarina Linares[4,] (0000-0001-5761-7237), IPVCE Carlos Marx.

Resumen

La ingeniería encuentra en las matemáticas las herramientas necesarias para el desarrollo del pensamiento lógico y la comprensión científica de los fenómenos externos desde la óptica del análisis. Plantear situaciones en el aula que puedan beneficiar el desarrollo de la motivación y meta cognición de los estudiantes y hacerles descubrir conexiones entre la historia y la vida cotidiana se convierte en una necesidad, pues las tendencias actuales convergen en un rechazo generalizado hacia las matemáticas. La presente investigación tiene como objetivo analizar la utilización de paradojas como herramienta didáctica para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las carreras de ingeniería.

Palabras claves: *enseñanza de la matemática; paradojas.*

Abstract

Engineering finds in mathematics the necessary tools for the development of logical thinking and scientific understanding of external phenomena from the perspective of analysis. Raising situations in the classroom that can benefit the development of students' motivation and meta-cognition and making them discover connections between history and everyday life becomes a necessity, since current trends converge in a generalized rejection of mathematics. The present research aims to

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

analyze the use of paradoxes as a didactic tool for the teaching and learning process of mathematics in engineering careers.

Keywords: *mathematics-teaching; paradoxes.*

Es indudable que entre todas las Ciencias, las matemáticas gozan de un estatus especial, definida como disciplina exacta y autónoma por naturaleza, es también, para las demás disciplinas, un instrumento de pensamiento y modelización de la realidad. Como consecuencia lógica de este hecho, todos nuestros conocimientos del mundo físico, tienden a menudo a construir esas teorías que pretenden incorporar lo más consecuentemente posible, y esta representación es matemática. En efecto, el aprendizaje de las matemáticas implica la construcción de un conjunto de herramientas intelectuales indispensables para dar sentido a diversas situaciones de las ciencias, la técnica y la tecnología. Algunas de estas herramientas son: el desarrollo de un pensamiento analítico, crítico, generalizador y reflexivo, la habilidad para realizar demostraciones y aproximaciones, el sentido de la precisión, la representación espacial y la medida, la capacidad para resolver problemas, la competencia para comunicar ideas por medio de interpretaciones y enfoques facilitados por las matemáticas, la destreza para relacionar conceptos dentro de las matemáticas y entre esta y otras actividades de carácter profesional e intelectual, cualidades todas que se reconocen en el desempeño de un buen ingeniero. La particularidad más importante de esta matematización de los conocimientos científicos y técnicos es la utilización de los métodos matemáticos en la búsqueda de nuevas leyes, en la profundización de los aspectos teóricos y en la determinación de un lenguaje formal específico para cada ciencia particular. Por tales razones es importante concebir la enseñanza de la Matemática integrada en la historia y la cultura, por su potencial didáctico esta inserción constituye un valioso aporte en la construcción de los conocimientos científicos, además, genera interés y motivación cuando se analizan las dificultades y problemas por las que ha transitado el pensamiento humano, hasta llegar a las formas actuales de presentación matemática (Mazario Triana, Sarmiento Reyes, & Toledano Vazquez, 2019).

La importancia esencial de la Matemática en la formación del ingeniero radica en ser el lenguaje de la modelación, el soporte simbólico con la ayuda del cual se expresan las leyes que gobiernan el objeto de trabajo del ingeniero. Por tanto, hay que otorgar prioridad al desarrollo de la capacidad de

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

modelar utilizando los conceptos y el lenguaje de la Matemática, así como a la habilidad de interpretar modelos ya creados sobre la base de los conceptos de la disciplina.

Entre las competencias profesionales más relevantes para los ingenieros están el adquirir una disciplina de pensamiento analítico integrando conocimientos de diversa índole, siendo el razonamiento lógico, el modelamiento matemático y el pensamiento abstracto aquellos con mayor nivel de relevancia (Suaza Jiménez & Lora Patiño, 2019).

En la actualidad, uno de los mayores problemas que enfrentan las ciencias académicas en todo el mundo es la falta de motivación de los estudiantes hacia las mismas, lo que va aparejado con el poco interés en su estudio y la no participación en las clases. El caso más grave y preocupante es el de la Matemática, un problema del cual pocas personas están ajenas. Cuba no está exenta de esta situación, y es siempre una meta lograr que en las aulas los estudiantes se motiven a estudiar algo que no les gusta, y, por tanto, muchas veces se trata de lograr primero que les guste (López González, Tito Corrioso, & Aguilar León, 2021).

El diseño de la asignatura deberá hacerse tomando en cuenta la necesidad de aumentar progresivamente el papel del estudio individual y de la apropiación activa del conocimiento. Debe disminuirse el peso relativo de las conferencias y promoverse el uso de la bibliografía aumentando el peso de los seminarios, introduciendo el enfoque problémico, el uso de métodos heurísticos y técnicas de resolución de problemas (Jorge Martín, 2017).

Una de las tareas fundamentales del profesor es localizar recursos didácticos de interés para la enseñanza de la materia que imparte y que le permita motivar a sus estudiantes. Estos recursos son especialmente importantes en la clase de matemáticas, donde la abstracción de los temas o las ideas contra intuitivas que, a veces, presentan los estudiantes plantean un reto didáctico para los profesores.

En este trabajo los autores se proponen como objetivo abordar el tema de las Paradojas Matemáticas, proponiendo las mismas como una herramienta didáctica que les sirva de apoyo a los profesores en la misión de motivar a los estudiantes, tomando como problema fundamental, la desmotivación de los estudiantes hacia esta ciencia. Además, se proponen las paradojas como vía para generar situaciones problémicas que posibiliten el debate y la generación de ideas entre los estudiantes.

Son varios los autores que justifican el interés de utilizar paradojas sencillas para plantear situaciones motivadoras en el aula que puedan beneficiar el desarrollo de la motivación y meta cognición de los estudiantes y hacerles descubrir conexiones entre la historia y la vida cotidiana. Una paradoja es un resultado o idea que, aparentemente, es opuesta a la opinión general, porque lleva implícita una contradicción lógica que, a primera vista, no se percibe. Una vez resuelta, generalmente se produce un aprendizaje, bien de un concepto que no se conocía o de una relación entre conceptos que aparecía oculta en el problema (Batanero, Contreras, Cañadas, & Gea, 2012).

Las paradojas son un poderoso estímulo para la reflexión. A menudo los filósofos se sirven de ellas para revelar la complejidad de la realidad. La paradoja también permite demostrar las limitaciones de las herramientas de la mente humana. Así, la identificación de paradojas basadas en conceptos que a simple vista parecen simples y razonables ha impulsado importantes avances en la ciencia, la filosofía y las matemáticas (Pérez del Pino & Alfonso Roque, 2017).

A continuación se mostrará una serie de ejemplos de paradojas que pueden ser utilizadas como elementos motivadores para la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería, haciendo hincapié en las áreas del sistema de conocimientos a las que responde y los momentos propicios para su uso en clases.

1. ¿1=2?

Contenido de la paradoja.

Se parte de esta condición: $\boldsymbol{a = b}$

Se multiplica por a ambos miembros: $\boldsymbol{a \cdot a = b \cdot a \Rightarrow a^2 = a \cdot b}$

Se resta b^2 en ambos términos: $\boldsymbol{a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2}$

Se descompone en factores: $\boldsymbol{(a-b)(a+b) = b(a-b)}$

Se divide por $(a-b)$: $\boldsymbol{a + b = b}$

Se sustituye a por b (eran iguales): $2b = b$

Y finalmente simplificando b: $\boldsymbol{1 = 2}$

Ahora, el principal problema está en que se sabe que el resultado final es falso, pero la idea entonces es ¿dónde está el error en el procedimiento? ¿Qué se hizo mal? Al parecer nada, todos los pasos parecen correctos. En este punto es necesario motivar al estudiante a que busque dónde pudo haber fallado el procedimiento, de lo contrario estará aceptando que 2 = 1, lo cual no parece ser tan falso ahora.

La solución de este dilema radica en el paso donde se divide por (a - b), lo cual es erróneo. Como se partió de que a = b, entonces a – b = 0 y al dividir por a – b se estaría incurriendo en una indefinición, dado a que la división por cero no está definida.

Las situaciones propicias para la aplicación de esta paradoja desde el punto de vista técnico de la matemática pueden ser:

- Ilustrar el método de demostración directa, donde de la verdad de la hipótesis se llega a la verdad de la conclusión, usando proposiciones cuya certeza se conoce previamente.
- Mostrar la utilización de transformaciones equivalentes en una igualdad.
- El empleo de técnicas de descomposición factorial.
- Abordar el tema relacionado con la indefinición provocada por la división por cero.

2. ¿0 > 1?

Contenido de la paradoja.

Se parte de esta condición: $\mathbf{0,5 < 1}$

Se aplica logaritmo en base 10 en ambos miembros: $\mathbf{\log 0,5 < \log 1}$

En el miembro derecho se resuelve el logaritmo planteado: $\mathbf{\log 0,5 < 0}$

Se divide por $\log 0{,}5$ ambos miembros: $\frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}5} < \frac{0}{\log 0{,}5}$

Finalmente se obtiene: $\mathbf{1 < 0}$

Nuevamente se presenta la misma situación que en la paradoja anterior, donde a partir de transformaciones aparentemente correctas se obtiene un resultado, que según la intuición y conocimientos precedentes, debe ser falso. Estos son los momentos de situación problémica que se deben aprovechar para que los estudiantes participen, todos entienden que hay un problema, pues 1 no puede ser menor que 0, sin embargo, muchos no saben por qué sucede eso, situación que lo invita a, por lo menos, pensar dentro de sí en buscar una solución.

El error está en la división por $\log 0{,}5$. Como el $\log 0{,}5$ es un número negativo (- 0, 301030) y la división por un número negativo invierte el signo de la desigualdad.

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

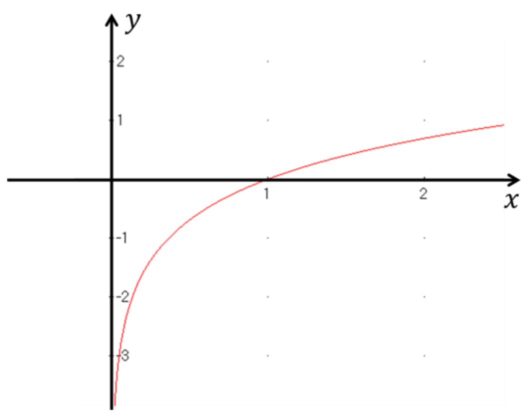
Las situaciones propicias para la aplicación de esta paradoja desde el punto de vista técnico de la matemática pueden ser:

- Demostraciones directas.
- Demostración de desigualdades y resolución de inecuaciones.
- Mostrar la utilización de transformaciones equivalentes.
- Analizar las propiedades de una función logarítmica.

Sería interesante aprovechar este espacio para mostrarles a los alumnos que en ocasiones no se necesitan saber valores exactos de una determinada expresión para arribar a ciertas conclusiones. En este caso, los alumnos pueden cuestionarse que sería necesario utilizar una calculadora científica u otro dispositivo de cómputo para el cálculo de $\log 0{,}5$, sin embargo, con un esbozo gráfico de la función $y = \log x$ se puede observar que para todo valor del dominio entre cero y uno los valores de las imágenes son negativos (Figura 1).

Figura 1

Gráfico de la función $y = \log x$.



Fuente: elaboración propia.

3. Paradoja de Galileo

La paradoja de Galileo es una demostración de una de las sorprendentes propiedades de los conjuntos infinitos. El carácter paradójico se da por poner en entredicho el principio de que el todo es mayor que sus partes.

En su último trabajo científico, *Dos nuevas ciencias*, Galileo Galilei hizo dos afirmaciones aparentemente contradictorias acerca de los números enteros positivos. Primero, algunos números

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

tienen la propiedad de ser un cuadrado perfecto (esto es, el cuadrado de un entero, desde ahora llamado simplemente cuadrado), mientras que otros no la tienen. Por ello, el conjunto de todos los números, incluyendo tanto a los cuadrados como a los no cuadrados, tiene que ser mayor que el conjunto de los cuadrados. Sin embargo, por cada cuadrado hay exactamente un número que es su raíz cuadrada, y por cada número hay exactamente un cuadrado. Por lo tanto, no puede haber más de un tipo que de otro. Este es uno de los primeros usos, aunque no el primero, de demostración a través de una función biyectiva.

Las situaciones propicias para la aplicación de esta paradoja desde el punto de vista técnico de la matemática pueden ser:

- Análisis de la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de funciones.
- Análisis del concepto de infinito.

4. El hotel infinito de Hilbert (Macho Stadler, 2012).

El Hotel Infinito de Hilbert es una construcción abstracta que interviene en varias metáforas inventadas por el matemático alemán David Hilbert. Esta metáfora explica, de manera simple e intuitivita, hechos paradójicos relacionados con el concepto matemático de infinito.

Todas las metáforas de Hilbert describen por medio de un hotel de habitaciones infinitas, cuatro paradojas de las encontradas por Georg Cantor. Numerosas personas han creado historias completas sobre la metáfora de David Hilbert.

El hotel más grande del mundo.

Dos grandes hoteleros que querían construir el hotel más grande del mundo se reunieron a dialogar sobre el asunto y comenzaron por el primer y más obvio tema a discutir: cuántas habitaciones tendría.

"— ¿Qué te parece si construimos un hotel con 1000 habitaciones?

— No, porque si alguien construyera uno de 2000 habitaciones, nuestro hotel ya no sería tan grande. Mejor hagámoslo de 10 000.

— Pero podría ser que alguien construyera uno de 20 000 y volveríamos a quedarnos con un hotel pequeño. Construyamos un hotel con 1 000 000 de habitaciones, ése sería un hotel grande.

— Y qué tal si alguien construyera uno con..."

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

Como siempre podría llegar a haber un hotel más grande, llegaron a la conclusión de que era necesario hacer un hotel con habitaciones infinitas de manera que ningún otro hotel del mundo pudiera superar su tamaño.

4.1. Infinito más uno.

Sin embargo, en un hotel de infinitas habitaciones no todo es color de rosa. Tan pronto se abrieron las puertas de este hotel la gente comenzó a abarrotarlo y pronto se encontraron con que el hotel de habitaciones infinitas se encontraba lleno de infinitos huéspedes. En este momento surgió la primera paradoja, así que se tomó como medida que los huéspedes siempre tendrían habitación asegurada, pero con el acuerdo previo de que tendrían que cambiar de habitación cada vez que se les pidiera.

Fue entonces cuando llegó un hombre al hotel, pero este se encontraba lleno, por supuesto esto no preocupó al cliente pues en el Hotel Infinito se aseguraba que todos tendrían habitación. El hombre pidió su habitación y el recepcionista, consciente de que no habría ningún problema, tomó un micrófono por el que avisó a todos los huéspedes que por favor revisaran el número de su habitación, le sumaran uno y se cambiaran a ese número de habitación, de esta manera el nuevo huésped pudo dormir tranquilamente en la habitación número 1. Pero, ¿qué pasó entonces con el huésped que se encontraba en la última habitación? Sencillamente no hay última habitación.

4.2. Dos infinitos.

Estando el hotel lleno de infinitos huéspedes, llegó un representante de una agencia de viajes, su problema era que tenía una excursión de infinitos turistas que necesitarían hospedarse esa noche en el hotel. Se trataba por lo tanto de hacer sitio a infinitos huéspedes en un hotel con infinitas habitaciones, todas ellas ocupadas en aquellos momentos. Pero el recepcionista no tuvo ningún problema en aceptar a los nuevos turistas. Cogió el micrófono y pidió a todos los huéspedes que se mudaran a la habitación correspondiente al resultado de multiplicar por 2 el número de su habitación actual. De esa forma todos los huéspedes se mudaron a una habitación par, y todas las habitaciones impares quedaron libres. Como hay infinitos números impares, los infinitos turistas pudieron alojarse sin más problema.

4.3. Infinito número de infinitos.

Estando el hotel lleno con infinitos huéspedes, llegó otro representante de la agencia de viajes aún más preocupado que el primero y avisó al primero el gran problema que había ocurrido, ahora la

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

agencia tenía un infinito número de excursiones con un infinito número de turistas cada una. "¡Qué enorme problema se presenta ahora!", pensaban los representantes de la agencia de viajes, ¿cómo podrían hospedar a un número infinito de infinitos turistas?

El recepcionista permaneció inmutable, por lo cual tomó tranquilamente el micrófono y se comunicó solamente con las habitaciones cuyo número fuera primo (p distinto de 1) o alguna potencia de estos (p^n), les pidió que elevaran el número 2 al número de la habitación en la que se encontraban (2^{p^n}) y se cambiaran a esa habitación.

Entonces asignó a cada una de las excursiones un número primo (distinto de 1), a cada uno de los turistas de cada una de las excursiones un número impar (t), de manera que la habitación de cada uno de los turistas, se calculaba tomando el número primo de su excursión (p) y elevarlo al número que les tocó dentro de su excursión (t) lo que da p^t.

Existiendo un número infinito de números primos y un número infinito de números impares, fácilmente se logró hospedar a un número infinito de infinitos huéspedes dentro de un hotel que solo tiene un número infinito de habitaciones.

Este grupo de paradojas pretende esclarecer, de una forma amena, dudas e interrogantes que se plantean con regularidad por parte de los estudiantes sobre el concepto de infinito.

Las situaciones propicias para la aplicación de esta paradoja desde el punto de vista técnico de la matemática pueden ser:

- Cálculo infinitesimal.
- Cálculo de Límites en el infinito.
- Cálculo de límites infinitos.
- Integrales impropias.
- Análisis de convergencia de series numéricas.
- Trabajo con funciones.

Las paradojas y otros elementos matemáticos evocadores, como las metáforas, los chistes, y los pasatiempos han sido siempre temas de referencia en la enseñanza de las Matemáticas, especialmente para hacer más amenas las clases y romper la consideración formal. En esta investigación, se desarrollaron algunas paradojas, para que sirvan de iniciación y base a los profesores en sus clases como herramientas didácticas para lograr la motivación de los estudiantes de carreras de ingenierías hacia el estudio de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, G. R., & Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades Educativas, 261*, 78-84.

Jorge Martín, M. (2017). Plan de Estudio E de Matemática 1 para Ingeniería Industrial(Curso diurno).

López González, C., Tito Corrioso, O., & Aguilar León, B. (2021). Las Paradojas Matemáticas en el proceso de enseñanza - aprendizaje. *EduSol, 21*.

Macho Stadler, M. (2012). Matemáticas a través de la paradoja. *Pensamiento matemático, 2*, 127-146.

Mazario Triana, I. C., Sarmiento Reyes, C. R., & Toledano Vazquez, I. S. (2019). Enfoque Pedagógico de la Matemática para el área de Ingeniería. In D. A. Olivera Gómez (Ed.), *Colaboraciones de Cuerpos Académicos en Innovación Educativa* (Primera ed., pp. 59): RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C..

Pérez del Pino, S., & Alfonso Roque, L. (2017). *Utilización de las paradojas en la enseñanza de la Matemática*.

Suaza Jiménez, J. H., & Lora Patiño, G. A. (2019). La importancia del razonamiento lógico en la formación del Ingeniero. *Interconectando Sabere*, 53-71.

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1