GUÍAS DE PROBABILIDADES PARA ESTUDIANTES A DISTANCIA SOBRE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD MÁS IMPORTANTES

PROBABILITY GUIDELINES FOR DISTANCE STUDENTS ON THE MOST IMPORTANT PROBABILITY DISTRIBUTIONS

MSc. Jorge Luis Sotolongo Echevarria[1], (0000000192467051) Centro Universitario Municipal Enrique Rodríguez-Loeches, Universidad de Matanzas, Cuba

jorge.sotolongo64@nauta.cu

Resumen

Los modelos de variables aleatorias son de gran importancia y ellos son representados utilizando distribuciones para variables discretas o continuas. El cálculo de probabilidad se hace muy fácil utilizando las tablas conociendo las características de la variable. El caso de la distribución normal, corresponde a variable continua, está tabulada la función de distribución, de ahí la importancia de conocer sus propiedades para el cálculo de probabilidades. En el caso de las distribuciones Chi-cuadrado, T'*Student*, y F de *Fisher*, el objetivo fundamental está en el manejo de la tabla para el cálculo de probabilidades ya que su aplicación se estudiará en la Estadística Matemática II. El objetivo de la investigación es orientar a los estudiantes en el estudio a distancia y desarrollar método correcto; para lograr los objetivos propuestos en la asignatura. Se orientan diferentes bibliografías para la orientación del contenido y un resumen de estos, ejemplos y ejercicios propuestos.

Palabras claves*: distribución binomial, variable aleatoria continua, variable aleatoria discreta, Poisson, Normal, Chi-cuadrado, T´Student y F de Fisher*

Abstract

The models of random variables belong to great importance and them they are represented using distributions for discreet or continuous variables. The calculation of probability becomes very easy using the charts knowing the characteristics of the variable. The case of the normal distribution corresponds to continuous variable, the distribution Function is tabulated, of there the importance of knowing its properties for the calculation of probabilities. In the case of the distributions Chi-square, T'Student, and F of Fisher, the fundamental objective is since in the handling of the chart for the calculation of probabilities its application it will be studied in the Mathematical Statistic II. The objective of the investigation is to guide the students in the study at distance and to develop correct

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

method; to achieve the objectives proposed in the subject. Different bibliographies are guided for the orientation of the content and a summary of these, examples and proposed exercises.

Keywords: *discrete random variable, continuous random variable, Binomial distribution, Poisson, Normal, Chi-square, T´Student and Fisher's F*

Para el estudio de la Distribución binomial el alumno debe tener dominio de qué es una variable aleatoria, y poder identificar las variables aleatorias discretas y continuas, así como dominar que es una función de probabilidad y como a través de ellas puede calcular probabilidad. En el caso de las variables aleatorias discretas se calcula probabilidad sumando, mientras que en el caso de las variables aleatorias continuas se calcula probabilidad integrando. Debe saber que la función de distribución tiene marcada importancia en las variables aleatorias continuas ya que permite el cálculo de probabilidad a través de las propiedades de la misma sin necesidad de integrar.

Estas dos distribuciones también son variables aleatorias continuas, por lo que, lo que está tabulada en la tabla es la función de distribución, por lo tanto, es válido lo planteado en el párrafo anterior.

Los aspectos fundamentales de este tema son:

1. Determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio mediante el uso de variables aleatorios.

2. Calcular probabilidades utilizando las Funciones de Probabilidad y de Distribución.

3. Identificar las principales distribuciones probabilísticas.

4. Utilizar las Tablas para el Cálculo de probabilidades.

Planteándose como objetivo de la guía. La elaboración de guía tiene como objetivo orientar el estudio y desarrollar método correcto; para lograr los objetivos propuestos en la asignatura. En esta aparece una orientación del contenido en diferentes bibliografías un resumen de estos, ejemplos y ejercicios propuestos. Como objetivo instructivo aplicar las distribuciones de probabilidad más importantes (Binomial, *Poisson*, Normal, Ji-Cuadrado. *T'Student* y F de *Fisher*

Estadística Matemática

Asunto: Distribución binomial. Distribución de *Poisson*. Distribución normal. Distribución Chi-Cuadrado. Distribución T-*Student*. Distribución F-*Fisher*.

Objetivos

- Identificar y caracterizar las distribuciones probabilísticas: Binomial, *Poisson*, y Normal. Y calcular probabilidad haciendo uso de las tablas correspondientes.

- Conocer las distribuciones Chi-Cuadrado, t de *Student* y F de *Fisher* y el cálculo de probabilidad haciendo uso de las tablas correspondientes.

Para su estudio consultar

- ✓ En el texto Estadística de Caridad Guerra estudiarse el concepto de Variables aleatorias discretas. Página 88-90, las características numéricas: Valor esperado y Varianza. Página 91, la Distribución binomial. Pág. 93-96. Estudiar ejemplos que aparecen en las páginas 95 y 96 respectivamente, en estos ejercicios se muestra cómo se calculan las probabilidades a partir de la función de probabilidad y a partir del uso de las tablas. Distribución *Poisson*. Pág. 96-98 Estudiar ejemplos que aparece en la página 97, en estos ejercicios se muestra cómo se calculan las probabilidades a partir de la función de probabilidad y a partir del uso de las tablas. Distribución binomial. Pág. 93-96. Estudiar ejemplos que aparecen en las páginas 95 y 96 respectivamente, en estos ejercicios se muestra cómo se calculan las probabilidades a partir de la función de probabilidad y a partir del uso de las tablas. Distribución *Poisson*. Pág. 96-98 Estudiar ejemplos que aparece en la página 97. Realizar los siguientes ejercicios: 17 página 115 (distribución binomial), Ejercicio 22 de la pág. 115 (Cálculo de valor esperado, varianza y desviación típica a partir de una distribución binomial), Ejercicio 21 página 115(aproximación de la Binomial a la *Poisson*). Estudiar el capítulo V sobre Distribuciones más utilizadas: de la página 98-104 la distribución normal, de la página 104-106 distribución Ji-Cuadrado, de la 106-108 T-*Student* y de la 108-111 la distribución F-*Fisher*, en esas páginas podrán estudiar ejemplos que ilustran el cálculo de probabilidades. Realizar los siguientes ejercicios: 23 pág. 116, 25 de la pág. 116 Guía de estudio 1 de la página 44 a 57
- ✓ Curso breve de Estadística [1] de la página 50 a 74
- ✓ Caridad Bustillo y otros. Capítulo 6 Estadística de epígrafe paginas 118-142
- ✓ Libro básico de probabilidad y estadística 52-182
- ✓ *Ronald E. Walpole*-Probabilidad y Estadística Para Ingenieros capitulo pag 114-232, Ed-*Prentice Hall* (2000)- 6b
- ✓ *Walpole, Myers, Myers* Ye-Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias-(2012), pag 143-255
- ✓ Resolver los autoexámenes de las guías de las páginas 454 y 56
- ✓ Resolver los ejercicios de Curso breve de Estadística pag 40 ,48, 72
- ✓ Resolver los ejercicios de Libro básico de probabilidad y estadística pag 84,122, 175

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

✓ Resolver los ejercicios de *Ronald E. Walpole*-Probabilidad y Estadística Para Ingenieros pág. 141 ,178 ,237

Distribuciones de Variables aleatorias:

En ciertos experimentos con algunos requisitos es posible identificar algunos modelos de variables aleatorias que estudiaremos en este encuentro.

Variables aleatorias:

V.A. discretas: Distribución Binomial, Distribución Poisson.

V.A. Continua: Distribución normal, Distribución T-student, Distribución Chi-cuadrado, Distribución F-Fisher

Distribución Binomial:

La distribución Binomial es una de las distribuciones discretas más utilizadas. Su nombre se debe a la relación que tiene la misma con el desarrollo del binomio:

$$(p+q)^n = C_x^n \; p^x q^{n-x}$$

Entre las distribuciones discretas más importante está la distribución Binomial, para la explicación de la misma es necesario conocer la distribución Bernoulli.

Un fenómeno Bernoulli es aquel donde solo son posible dos resultados: éxito y fracaso. Por tanto, el espacio muestral será:

S = {éxito, fallo}

Donde el evento simple "éxito" tiene una probabilidad de ocurrencia p y el evento "fallo" una probabilidad q = 1 − p.

En una distribución de Bernoulli puede ser construida una variable aleatoria X en el espacio muestral S, asignando el valor X = 1 a la ocurrencia de un éxito, asignando el valor X = 0 a la ocurrencia de un fallo.

- Por tanto, su función de probabilidad quedaría:

$$p(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q & x = 0 \\ 0 & otro\,caso \end{cases}$$

Variable Binomial: Es aquella que denota el *número de éxitos que ocurren en n pruebas independientes*:

Función de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x q^{n-x} & para\; x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & para\; otros\; valores \end{cases}$$

Monografías 2021
Universidad de Matanzas © 2021
ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

Donde:

n: es el número de pruebas independientes realizadas   x: es el número de éxito

p: probabilidad de ocurrencia de un éxito

Notación: X ~ B(n,p)

E(X) = np   V(X) = npq

Ejemplo de Distribución Binomial.

En cierto Hotel de Varadero se está realizando una investigación acerca de la disciplina laboral. Las estadísticas demuestran que el 5% de los trabajadores son asentistas, si se selecciona una muestra aleatoria de 5 trabajadores. Calcule la probabilidad de que:

a) 2 de ellos sean ausentitas   b) Entre 3 y 5 sean ausentitas   c) De que todos asistan

d) Al menos 4 sean asentistas.   e) Promedio de ausentitas que se espera en la muestra.

Aquí se puede observar que la distribución binomial se ajusta, ya que:

- el resultado se puede clasificar en éxito y fracaso (asentistas y no ausentitas respectivamente)

- las pruebas son independientes, es decir que un obrero sea ausentito es independiente de que otro lo sea.

- n es finito, 5 trabajadores asentistas.

- p es constante, el 5% de los trabajadores son ausentitas. 5% =0,05

Por tanto puedo decir que X ∑ B(5, 0.05)

- Estudiar en la guía pag 31 como calcular probabilidad a partir de la función de distribución sería:

- ✓ $P(X \leq Xk) = F(x)$
- ✓ $P(X > Xk) = 1 - F(x)$
- ✓ $P(X_1 < X \leq X_2) = F(x_2) - F(x_1)$
- ✓ $P(a \leq x \leq b) = Fx(b) - Fx(b) + f(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a) + P(X = a)$
- ✓ $P(a < x < b) = Fx(b) - Fx(a) - f(b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) - P(X = b)$
- ✓ $P(a \leq x < b) = Fx(b) - Fx(a) + f(a) - f(b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) + P(X = a) - P(X = b)$

- Estudiar en la guía pag 38 y 39 como trabajar con la tabla estadísticas

Variable aleatoria discreta X:

de trabajadores ausentitas en la muestra.

$$X \to B(5;0,05)$$

a) $P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = B(5;0,05;2) - B(5;0,05;1) = 0,9988 - 0,9774 = 0,0214$

b) $P(3 \leq x \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 3) + P(X = 3) = P(X \leq 5) - P(X \leq 3) + P(X \leq 3) - P(X \leq 2)$

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = B(5;0{,}05;5) - B(5;0{,}05;2) = 1 - 0{,}9988 = 0{,}0012$$

c) $P(X = 0) = P(X \leq 0) = B(5;0{,}05;0) = 0{,}7738$

d) $X \to B(5;0{,}05)$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - B(5;0{,}05;3) = 1 - 1 = 0$$

e) $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}05 = 0{,}25$

Distribución *Poisson*. (Estudiar en la guía pág. 41- 43)

Variable *Poisson*: Cuando consideramos la ocurrencia de ciertos sucesos en un intervalo continuo (tiempo, longitud, etc), y estos sucesos ocurren de forma independiente, entonces la frecuencia de ocurrencia de estos fenómenos está asociada a una distribución de Poisson.

Función de probabilidad: $p(x) = \dfrac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,....$

Donde:

X: Número de éxitos en un intervalo T.

Notación: X ~ P(λ); donde λ = θT

θ- número medio de ocurrencias del fenómeno por unidad T.

E(X) = V(X) = λ

Ejemplo Distribución *Poisson*.

Un sitio web tiene una tasa media de visitas de 3 cada hora. Calcule la probabilidad de que:

a) No se visite el sitio en dos horas.

b) Se visite 3 veces en 3 horas.

c) Se visite al menos dos veces en 2 horas.

d) Se visite hasta tres veces en 45 minutos.

Variable aleatoria discreta X: número de visitas al sitio web en cierta unidad de tiempo. (Estudiar en la guía pag 42 Cómo está estructurada la tabla

$X \to P(\lambda)$ θ = 3 interrupciones/hora

a) T = 2 horas, λ=3 interrupciones/hora. 2 horas = 6 interrupciones.

$$P(X = 0) = P(X \leq 0) = P(6;0) = 0{,}0025$$

b) T = 3 horas, λ=3 interrupciones/hora. 3 horas = 9 interrupciones.

$$P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = P(9;3) - P(9;2) = 0{,}0212 - 0{,}0062 = 0{,}015$$

c) T = 2 horas, λ=3 interrupciones/hora. 2 horas = 6 interrupciones.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(6;1) = 1 - 0{,}0174 = 0{,}9826$$

d) Aquí debemos llevarlo todo a la misma unidad de tiempo (horas).

T = 3/4 horas, λ=3 interrupciones/hora. 3/4 horas = 2,25 interrupciones.

$$P(X \leq 3) = P(2{,}25;3) = 0{,}8194$$

Aplicación de la distribución de Poisson relacionada con la distribución binomial.

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

La distribución *Poisson* es una aproximación a la distribución Binomial para el caso que n sea muy grande y p muy pequeña.

(Aunque no existe un criterio unificado generalmente se utiliza esta aproximación en los casos:

$(np \leq 5 \quad y \quad n \geq 50)$ o $p < 0{,}1$

El proceso se realiza haciendo: $\lambda = np$

Ejemplo Distribución *Poisson* aplicada a la binomial.

De acuerdo con la Oficina Nacional de Bioestadística del Departamento de Salud, Educación y Bienestar de los EE. UU el número promedio de ahogados en accidentes por año en ese país es 3 por cada 100 000 habitantes. Halle la probabilidad de que en una Ciudad de 200 000 habitantes:

a) No haya ninguno b) Haya 2 c) Hayan 6

d) Hayan 8 e) Haya entre 1 y 8 ahogados en accidentes por año.

Variable aleatoria discreta X: Número de ahogados en accidentes por año en una ciudad.

$$X \rightarrow B(200000; 0{,}00003)$$

Utilizamos la aproximación por *Poisson:*

$$\lambda = np = 200000 \cdot 0{,}00003 = 6$$

a) $P(X=0) = P(X \leq 0) = 0{,}0025$

b) $P(X=2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = 0{,}0620 - 0{,}0174 = 0{,}0446$

c) $P(X=6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = 0{,}6063 - 0{,}4457 = 0{,}1606$

d) $P(X=8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 7) = 0{,}8472 - 0{,}7440 = 0{,}1032$

e) $P(1 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 0) = 0{,}8472 - 0{,}0025 = 0{,}8447$

¿Cómo está estructurada la tabla? *(Guía pág. 42)*

Ejercicio. #1 Una pizarra telefónica recibe 480 llamadas en una hora, pero no puede recibir más de 12 llamadas en un minuto.

Determine: a.- La probabilidad de que se produzcan 10 llamadas en un minuto.

b.- La probabilidad de que la pizarra quede saturada en un minuto dado.

c.- La probabilidad de que se produzcan a lo sumo 1 llamada en un minuto.

d.- La probabilidad de que se produzcan más de 2 llamadas en un minuto.

e.- El número de llamadas esperadas en un minuto.

x: # de llamadas que se reciben en un minuto

λ = 480/hora Se tiene que llevar λ a las mismas unidades que piden la probabilidad: en minutos.

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

Se puede hacer a través de una simple regla de 3

480 ------ 60 mts

λ ------ 1 mt 480/60 = 8 por mt $\lambda = 8$ /mt

Ahora se va a la tabla y se busca un $\lambda = 8$, y dentro de este grupo se busca el valor de la X o las X que se necesitan.

a.- $P(x = 10) = f(10) = 0.0993$

b.- $P(x > 12)$ = Porque como la pizarra no puede recibir más de 12 llamadas en un minuto, quedaría saturada si recibe más de 12 llamadas $P(x > 12) = 1 - P(x \leq 12) = 1 - [p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + ... + p(x=12) = 1 - 0.9362 = 0.0638$

Variable aleatoria Continua.

Distribución Normal.(Estudiar en la guía pág. 44-48)

Descubierta en 1733 por De *Moivre*, es la más importante de todas las distribuciones, por la gran frecuencia con que en la práctica se presentan variables con esta distribución o una aproximación de ella.

A continuación, trataremos una de las distribuciones más importante dentro de la teoría estadística dada la frecuencia con que la misma aparece en la práctica, asociada a los más disímiles fenómenos y los que solo tienen en común la infinidad de causas diferentes que intervienen en ellos, además de que algunas leyes de probabilidad pueden ser aproximadas por ella. Esta distribución es la llamada normal.

Distribución Normal:

Cuando una variable es el resultado de muchos factores aleatorios independientes cada uno de los cuales aisladamente tiene un efecto despreciable, esa variable tiene un comportamiento normal; de ahí su gran frecuencia de aparición.

Fue muy trabajado alrededor del año1820 por *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855). De ahí el nombre de Curva de *Gauss*.

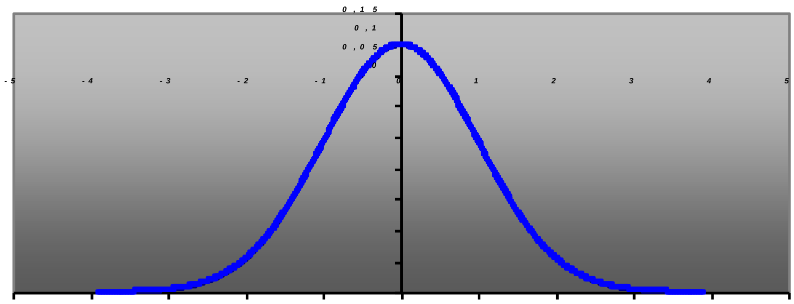
Una variable aleatoria X que sigue una ley normal, tiene una *función de densidad probabilística* dada por la expresión:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x, \mu \in \Re; \sigma > 0$$

Notación:

$$X \to N\left(\mu; \sigma^2\right)$$

Monografías 2021
Universidad de Matanzas © 2021
ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1



La campana de *Gauss*, curva de *Gauss* o curva normal, es una función continua, simétrica, cuyo máximo coincide con la media μ y tiene dos puntos de inflexión situados a ambos lados de la media, a una distancia σ de ella.

Propiedades:

1. Simetría respecto a X = μ

2. Asintótica al eje x

3. Area bajo la curva igual a 1

4. -∞ < X < +∞

5. E(X) = μ, V(X) = σ

Proceso de Tipificación de una variable aleatoria normal.

Cambio de origen y de escala para la curva normal, de manera que toda variable normalmente distribuida con parámetros μ, σ^2, se transforma en una normal con μ = 0 y σ = 1, haciendo la siguiente transformación:

Sea $X \rightarrow N(\mu;\sigma^2)$ Llamemos $Z \rightarrow N(0;1)$

Se cumple $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, por tanto: $P(X < x) = P\left(Z < \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Ejemplo General para Distribución Normal. (Estudiar en la guía pág. 46 estructura y manejo de la tabla)

Sea X una variable con Distribución Normal tal que: X ~ N (20,4)

a) Calcular: P (X > 22); P (16 < X < 22)

b) $P(X > 22) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} > \dfrac{22-20}{2}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$

c) $P(16 < X < 22) = P\left(\dfrac{16-20}{2} < \dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{22-20}{2}\right) = P(-2 < Z < 1)$

$$= P(Z < 1) - P(Z \leq -2) = P(Z < 1) - P(Z \geq 2) = P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2))$$

$$= P(Z < 1) - 1 + P(Z < 2) = 0{,}84134 - 1 + 0{,}97725 = 0{,}81859$$

Búsqueda de percentiles de orden α de N (0,1)

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

- En ocasiones es de interés conocer el valor de Z que le corresponde un valor de probabilidad acumulada determinada, determinar el valor de Z_α conocido el valor α.

Se tiene: $P(Z < Z_\alpha) = \alpha$

Ejemplo: Calcular: $Z_{0.90} = 1.28$ $Z_{0.25} = -Z_{0,75} = -0,67$

Estructura y manejo de la tabla:

La tabla de esta distribución está en las páginas 15 y 16 de la selección de tablas estadísticas.

Ejemplo**:**

Las estaturas de las mujeres de cierta región se distribuyen según $X \sim N(160,8;36)$.

Determine la probabilidad de que la seleccionar una mujer mida:

a) Más de 160,8 b) Entre 150 y 170 c) A lo sumo 170

X: estatura de las mujeres $X \sim N(160{,}8;6^2)$

a) $P(X > 160.8) = P(Z > 0) = 0.5$

b) $P(150 < X < 170) = P(-1.8 < Z < 1.53) = P(Z < 1.53) - P(Z < -1.8) = P(Z < 1.53) - [1 - P(Z < 1.8)]$

$= 0.937 - [1 - 0.9641] = 0.9011$

c) $P(X < 170) = P(Z < 1.53) = 0.937$

Aproximaciones de la Binomial y la *Poisson* a la Normal

Binomial → Normal

Se aproxima cuando: $n > 20$ pero debe cumplirse que $np > 5$ y $nq > 5$.

Se realiza a través del teorema central del límite haciendo que n

Tipificando nos queda

Poisson → Normal

Se aproxima cuando $\lambda > 10$. Aplicando el teorema central del límite nos queda:

Distribución *T-student*. (Estudiar en la guía pag 49-51)

Es una distribución continua de considerable importancia práctica, muy utilizada en la teoría de muestras pequeñas, con la que se trabajará en el campo de la inferencia.

Fue introducida por *William Gosset* que realizó publicaciones bajo el nombre de "*Student*" en 1908.

Al igual que la distribución Normal la T-*Student* es simétrica respecto al eje X, o sea, al E(t) por tanto, el valor de t se encontrará en el intervalo $-\infty < t < +\infty$

La distribución t'*student* es la distribución de la variable:

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$$

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

Donde ν es la letra griega nu, que es un entero positivo, conocida por grados de libertad. Las variables "X" y "Y" son variables aleatorias independientes, donde "X" está normalmente distribuida con media cero y desviación típica uno, y "Y" sigue una distribución Ji'Cuadrado con grados de libertad.

$$f(t) = \frac{K_\nu}{(1+t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}$$

Siendo su función de probabilidad

K_ν Constante que depende de ν

Notación: $X \to T(\nu)$ ν Grados de libertad

Esta distribución es simétrica, como la normal, pero es un poco más achatada que ella y también se encuentra tabulada a través de F_t.

Características numéricas

$$E(t) = 0 \qquad V(t) = \frac{v}{v-2} \to n > 2$$

Se tiene una Variable aleatoria "x", con distribución t-*student*, resuelva las siguientes proposiciones:

Ejemplo 1

a) Represente gráficamente y calcule $P(t(17) > -0.392)$.

b) Halle $P(t(17) < 0.863)$; $P(-1.07 < t(17) < 2.9)$; $P(t(17) < -0.534)$; $P(-1.74 < t(17) < -0.257)$.

c) Halle t_k tal que $P(t(17) < t_k) = 0.75$

Solución ejemplo 1:

$P(t(17) > -0.392) = P(t(17) < 0.392) = F_t(0.392) = 0.65$.

Solución ejemplo 1:

$P(t(17) < t_k) = 0.75$ ====> $t_k = 0.689$

De aquí se suele escribir lo siguiente: $T_{0,75;17} = 0,689$

Y esta es la mayor utilización que le daremos en los problemas de inferencia estadística que estudiaremos más adelante.

La estructura de esta tabla es la siguiente: (guía pág. 50)

Distribución *ji (chi)-cuadrado* (Estudiar en la guía pág. 51-54)

Si $X_1, X_2, \ldots X_v$, son variables aleatorias N (0,1) e independientes.

La suma de sus cuadrados, se representan en general por χ^2 (Ji-Cuadrado ó Chi-cuadrado) y donde:

$\chi^2 = X^2_1 + X^2_2 + \ldots + X^2_v$

Fue publicada por *Helmert* en 1876

Función de densidad (χ^2)

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

$$f(\chi^2)=\begin{cases} K_v\,\chi^{\frac{(v-2)}{2}}\,e^{\frac{-\chi^2}{2}} & \text{para } \chi^2>0 \\ 0 & \text{para otros} \end{cases}$$

Donde:

n = v: Parámetro de la distribución. Grados de libertad. K_n: constante que depende de n

- Notación $\chi^2 \sim \chi^2_v$

Características numéricas

$$E(\chi^2)=v \qquad V(\chi^2)=2v \rightarrow v \neq 0$$

La distribución χ^2 tiene como $\mu = \nu$ y $\sigma^2 = 2\nu$, no es simétrica, siempre toma valores positivos y también se encuentra tabulada a través de F_t.

Ejemplo 2: Se conoce que una variable en estudio tiene una distribución χ^2, resuelva las siguientes proposiciones:

a) Calcule P $(\chi^2(17) > 10.1)$ y represente el área en un gráfico. b) Halle P $(\chi^2(17) < 27.6)$; P$(5.7 < \chi^2(17) < 21.6)$.

c) Halle χ^2_k si P $(\chi^2(17) > \chi^2_k) = 0.8$

Solución ejemplo 2:

a) Representación gráfica y cálculo:

$$\chi^2(17)=10{,}1$$

P $(\chi^2(17) > 10.1)$ = 1 - P$(\chi^2(17) < 10.1)$ = 1 - $F\chi^2(10.1)$ = 1-0.10= 0.90.

b) P $(\chi^2(17) < 27.6)$ = $F\chi^2(27.6)$ = 0.95 (por def. de F_t)

P $(5.7 < \chi^2(17) < 21.6)$ = $F\chi^2(21.6)$ - $F\chi^2(5.7)$ por propiedad de F_t

= 0.80 - 0.005 = 0.755.

c) P$(\chi^2(17) > X^2_k)$ = 0.8 ===> P$(\chi^2(17) < X^2_k)$ = 0.20

por tanto, X^2_k = 12

De aquí se suele escribir lo siguiente: $\chi^2_{0,8;17}=12$

Y esta es la mayor utilización que le daremos en los problemas de inferencia estadística que estudiaremos más adelante.

Estructura de la tabla: (guía pág. 52)

Cuando v es grande (v > 30) se aproxima entonces a la distribución normal de la siguiente manera:

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

$$\sqrt{2\chi^2} \sim N\left(\sqrt{2v-1}\,;1\right)$$

En caso de que no apareciera un grado de libertad en la tabla y nos pidan el valor de χ^2 conociendo la probabilidad procederíamos de la siguiente forma:

$$\chi^2 \approx \frac{1}{2}\left(Z_{1-\alpha} + \sqrt{2v-1}\right)^2$$

Ejemplo:

a) $P\left(\chi^2_{95} > \chi^2\right) = 0.05$ $\quad Z_{1-0.05} = Z_{0.95} = 1.64$

$$\chi^2 = \frac{1}{2}\left(Z_{1-0.05} + \sqrt{2\cdot 95 - 1}\right)^2$$
$$\chi^2 = \frac{1}{2}\left(1.64 + \sqrt{189}\right)$$
$$\chi^2 = 118.4$$

b) $P\left(\chi^2_{95} > 100\right) = ?$

Variable aleatoria Continua.

Distribución F-Fisher. (Estudiar en la guía pag 54-56)

Es una distribución continua de considerable importancia práctica, es utilizable en muchas aplicaciones de la inferencia estadística.

Introducida por el inglés *Ronald Fisher* (1890-1962). Es considerado uno de los fundadores de la Estadística Moderna.

Se dice que una v.a. tiene distribución F-*Fisher* con parámetros v_1; v_2 si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} K''_{v_1;v_2} \cdot \dfrac{x^{\frac{v_1-2}{2}}}{\left(v_2 + v_1 x\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Constante que depende de v_1 y v_2 $\quad K''_{v_1;v_2}$

Notación: $X \to F(v_1; v_2)$ $\quad v_1$ y v_2 Grados de libertad

La distribución F es parecida a la chi-cuadrado, pero depende de dos grados de libertad, siempre toma valores positivos y también se encuentra tabulada a través de F_t.

Ejemplo 3:

Se conoce que una variable en estudio tiene una distribución F-*Fisher*, resuelva las siguientes proposiciones:

a) Calcule $P(F_{(4,15)} < 3.06)$; $P(F_{(4,15)} > 4.89)$; $P(2.18 < F_{(10,12)} < 4.30)$.

b) Diga

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

- el valor de x_k tal que $P(F_{(10,20)} < x_k) = 0.99$

- el valor de x_k tal que $P(F_{(12,8)} > x_k) = 0.95$

Solución ejemplo 3:

a) Cálculo:

$P(F_{(4,15)} < 3.06) = F_F(3.06) = 0.95$ por definición de F.

$P(F_{(4,15)} > 4.89) = 1 - F_F(4.89) = 1 - 0.99 = 0.01$

$P(2.18 < F_{(10,12)} < 4.30) = F_F(4.30) - F_F(2.18) = 0{,}99 - 0.90 = 0.09$

b) $P(F_{(10,20)} < x_k) = 0.99 ===> X_K = 3{,}3681$

De aquí se suele escribir lo siguiente:

$$F_{0.99;10;20} = 3{,}3681$$

$P(F_{(12,8)} > x_k) = 0.95 ===> P(F_{(12,8)} < x_k) = 0.05$

De la misma manera aquí estamos buscando: $F_{0.05;12;8}$ que no aparece en las tablas, pero se cumple para esta función:

$$F_{\alpha;v_1;v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha;v_2;v_1}} \qquad F_{0.05;12;8} = \frac{1}{F_{0.95;8;12}} = \frac{1}{2.88} = 0.347$$

Manejo de la Tabla: paginas 54-55

Ejercicios

1- Calcular por tablas y software:

a) $P(Z > 1.54)$ **b)** $P(Z < 2.83)$ **c)** $P(Z < -0.42)$ **d)** $P(Z > -0.91)$

e) $P(0.43 < Z < 2.03)$ **f)** $P(-1.01 < Z < 2.03)$ **g)** $P(Z > a) = 0.025$ **h)** $P(Z < a) = 0.95$

2- El tiempo que demora el mantenimiento general de cierto tipo de auto ligero, destinado al servicio de taxis, en la empresa de TRANSTUR puede considerarse una variable aleatoria normal con media 3,5 horas y varianza $1h^2$.

a) ¿Cuál debe ser la norma de tiempo a establecer para el mantenimiento general de este tipo de auto si se desea que en el 90% de las ocasiones este mantenimiento demore como máximo el tiempo establecido en la norma?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un mecánico termine en menos de 4,5 horas dicho mantenimiento? Interprete el resultado.

c) ¿Qué probabilidad hay de que el mecánico dé mantenimiento entre 3,5 y 4,5 horas?

3- Se sabe que el costo de producción de un artículo que produce cierta fábrica para el turismo es una variable normalmente distribuida con media 5 centavos y varianza de 1 centavo^2. Calcule:

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

a) La probabilidad de que el costo de producción de un artículo seleccionado aleatoriamente sea mayor de 5.5 centavos.

b) La probabilidad de que al seleccionar un artículo aleatoriamente, el costo de producción del mismo esté entre 4.53 y 5.55 centavos.

c) ¿Qué proporción de artículos tienen su costo de producción menor de 4 centavos?

d) Por encima de que valor se encuentra el costo de producción del 2 % de los artículos.

4- El precio de venta promedio de una muestra grande de artículos es de 110 pesos con una desviación estándar de 25 pesos, suponiendo una distribución normal de precios.

a) ¿Qué proporción de los artículos tienen un precio de 80 pesos o menos por artículo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo escogido al azar tenga un precio de venta entre 100 y 125 pesos?

c) ¿Por debajo de qué precio se vende el 20% de los artículos de precio más bajo?

d) ¿Por debajo de qué precio se vende el 20% de los artículos de más alto precio?

5- La línea de jabón nácar de la Empresa *Suchel Debón* produce pastillas de jabón cuyo peso es una variable aleatoria con media de 90 g y varianza de 0,8 g2. La producción diaria de esta línea es de 1000 pastillas. Para el control de la calidad se ha establecido que si la pastilla pesa menos de 89 g sea calificada como defectuosa. Las cajas de este tipo de producto están formadas por 100 pastillas. A la línea se le está realizando una inspección sorpresiva y se ha decidido que la misma se le realizará a 20 cajas escogidas de forma aleatoria y se declarará la línea como controlada en caso de que al menos 18 cajas sean clasificadas como buenas. Una caja se considera como buena cuando al escoger una muestra de 10 pastillas al menos 6 son no defectuosas.

a) Calcule la probabilidad de que una pastilla seleccionada al azar tenga un peso por encima de 90,5 g

b) Aproximadamente cuantas pastillas tendrán un peso entre 89,5 y 90,5g al término de un día de trabajo.

c) Calcule la probabilidad de que la línea sea declarada como controlada.

6- Assume the errors of measurement observed on individual wristwatches are normally distributed with a mean of 0 and a standard deviation of 60 sec. What is the probability of a randomly selected watch being within 30 sec of the correct time of day?

7- Calcular utilizando las tablas y la computadora

a) $X^2_{0.025;10}$ b) $X^2_{0.05;5}$ c) $X^2_{0.05;4}$ d) $X^2_{0.1,18}$ e) $X^2_{0.975,9}$ f) $F_{0.01;4;2}$ i) $F_{0.05;5;5}$

j) $F_{0.95;5;6}$.

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

8- En el Hotel Playa de Oro se presentaron problemas en la rapidez del servicio en el área de Restauración, por esto la dirección del hotel decidió hacer un estudio integral a 35 trabajadores que realizan la función de dependientes gastronómicos. Uno de los aspectos de la investigación fue la edad de los trabajadores, que se conoce sigue una distribución normal con media de 50 años y desviación típica de 11 años.

a) ¿Qué proporción de trabajadores tiene una edad superior a los 55 años?

b) Determine cuántos trabajadores tiene una edad superior a los 55 años

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador seleccionado al azar tenga una edad entre 35 y 40 años?

d) ¿Por debajo de qué edad está el 20% de los trabajadores?

e) Cuál es la edad mínima que tiene los trabajadores del hotel.

9- El departamento de recepción del hotel Brisas del Caribe realizó un estudio durante el mes de enero con el objetivo de conocer si el arribo de los clientes al hotel diariamente va en ascenso o descenso en el año 2014, históricamente al hotel llegan el 20% de los turistas en este mes. Se quiere calcular las siguientes probabilidades:

a) Que arriben entre 10 y 15 turistas diariamente al hotel. b) Que lleguen 5 turistas.

c) Que arriben más de 8 turistas.

d) El número de turistas que promedio llegará en el mes de enero.

e) Suponga que los autos para ser rentados arriban a la piquera del hotel Brisas del Caribe de 2 autos/hora, según una distribución Poisson. Cuál es la probabilidad de que:

- No suceda arribo en la piquera en un intervalo de 5 minutos
- Sucedan más de dos arribos en un minuto.
- ¿Cuántos arribos se producen como promedio en 30 minutos? Determine la desviación típica.

10- A un conmutador de la oficina principal de cierta compañía llegan llamadas a un promedio de dos por minuto y se sabe que tiene distribución de *Poisson*. Si el operador está distraído por un minuto, cuál es la probabilidad de que el número de llamadas no respondidas sea:

a) Cero. b) Por lo menos una c) Entre 3 y 5, ambas inclusive.

11- Los sobrecostos por actualización de computadores en su empresa tienen un promedio de $23 500, con una desviación estándar de $9 400. Conociendo que los sobrecostos tienen una distribución normal, calcula la probabilidad de que una actualización tenga un sobrecosto:

a) Superior a $24 000. b) Entre $22 000 y $25 000.

ISBN: 978-959-16-4681-1

c) Como director ejecutivo usted no desea arriesgar a más del 34% la probabilidad que el sobrecosto en una actualización propuesta recientemente exceda los $25 000, ¿Debería ejecutar la actualización?

12- Los empleados en cierta empresa trabajan un promedio de 55,8 horas por semana, con una desviación estándar de 9,8 horas. Conociendo que los tiempos se distribuyen normalmente, calcule la probabilidad de que un empleado seleccionado al azar trabaje:

a) Más de 60 horas. b) Menos de 50 horas.

c) Los ascensos son más probables para los empleados que están dentro del 10% de los que pasan más tiempo trabajando, ¿Cuánto debe trabajar usted para mejorar sus oportunidades de ascenso?

13- Un fabricante le suministra un diseño prototipo de cierto producto que requiere su negocio. Este nuevo producto, que es enviado en lotes de 12, sufre de una tasa de defectos del 40%.

a) Si usted no desea un riesgo mayor del 10% en la probabilidad de que 5 de los productos sean defectuosos del lote ¿debería comprarle al distribuidor?

b) Si usted no desea enfrentar un riesgo mayor del 20% de probabilidad de que más de 5 salgan defectuosos, ¿debería comprar al proveedor?

14- Los aviones llegan a cierto aeropuerto a una razón promedio de 5,2 por minutos. Se conoce que las llegadas siguen una distribución de Poisson. Calcule la probabilidad de que en 2 minutos lleguen:

a) Más de 10 b) Entre 10 y 15.

c) Los controladores de tráfico aéreo pueden manejar de forma segura un máximo de 7 aviones por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que se arriesgue la seguridad del aeropuerto?

15- Cierta empresa se dedica a la distribución y venta de cierto producto para consumo. Su venta es enormemente estable y se realiza por cajas. Desgraciadamente una de las máquinas empaquetadoras ha estado averiada y como consecuencia en el almacén un 10% de las cajas no están completas.

a) Calcular la probabilidad de que un cliente que ha pedido cinco cajas reciba exactamente dos cajas incompletas.

b) Calcular la probabilidad de que un cliente que ha pedido 15 cajas reciba más de 3 incompletas.

c) Si cada cliente paga $1000 CUP por cada caja, y además, si viene incompleta pierde $120 CUP por caja, ¿Cuánto pagaron cada uno de los clientes anteriores a la empresa y cuál es la pérdida esperada en cada caso?

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

16- Mensa es una asociación internacional de personas con alto coeficiente intelectual. Para pertenecer a ella, una persona debe tener un coeficiente de 132 o más alto. Si las calificaciones del coeficiente de inteligencia en cierta región se distribuyen normalmente con promedio 100 y desviación estándar 15:

a) ¿Qué porcentaje de las personas en esta región califica para ser miembro de Mensa?

a) ¿Qué porciento de personas poseen un coeficiente entre 80 y 110?

b) ¿Cuál es el valor por debajo del cual se el 10 % de las personas?

17- El profesor de estadística de cierto grupo acepta que el día antes del examen lo consulten si tienen alguna duda mientras se preparan para el examen final. Parece que la llegada de los estudiantes al departamento se ajusta a una distribución de *Poisson*, con un promedio de 5,2 estudiantes cada 20 minutos. El profesor está preocupado porque si muchos estudiantes necesitan sus servicios, puede resultar un problema de congestión.

a) El profesor debe determinar la probabilidad de que cuatro estudiantes lleguen durante cualquier intervalo de 20 minutos, si la probabilidad excede el 20%, le pedirá ayuda a otro colega. ¿Debe hacerlo?

b) Si la probabilidad de que más de 7 estudiantes lleguen durante un período de 30 minutos excede el 50%, el mismo profesor ofrecerá tutoría adicional. ¿Será necesario?

18- Los empleados de cierta compañía trabajan un promedio de 55,8 horas por semana, con una desviación típica de 9,8 horas. Si las horas de trabajo se distribuyen normalmente responda las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado seleccionado al azar trabaje menos de 50 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado seleccionado al azar trabaje entre 45 y 65 horas?

c) Los ascensos son más probables para los empleados que están dentro del 10% de los que pasan más tiempo trabajando. ¿Cuánto debe trabajar usted para mejorar sus oportunidades de ascenso

En la guía se trato algunos modelos de variables aleatorias como la Distribución binomial. Distribución de *Poisson*. Distribución normal. Distribución Ji-Cuadrado. Distribución T-*Student*. Distribución F-Fisher para que el estudiante pueda Identificar, conocer, caracterizar las distribuciones probabilísticas y calcular probabilidad haciendo uso de las tablas correspondientes. En la misma pueden encontrar sugerencias para que le sean más fáciles de comprender los diferentes contenidos, así como ejercicios propuestos lo que le permite desarrollar un método correcto de estudio. La misma contribuyen, además, a desarrollar partiendo de los conocimientos

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1

teóricos, los hábitos y habilidades necesarios para la comprensión, aplicación e interpretación de los métodos Estadísticos, que son estudiados, ayudándolos de esta forma a desarrollar en el estudio, hábitos de trabajo independiente en la misma encontramos además de los contenidos ejemplos resueltos, así como ejercicios orientado de los libros y algunos extraídos de exámenes aplicados en años anteriores. La que puede ser utilizadas como base en otras carreras a distancia que tenga estos contenidos en el plan de estudio.

Referencias Bibliográficas

Almeida Bravo, R. J. (2004) *Manual de Fórmulas y Tablas Estadística*. Dpto Matemática General. Universidad de Matanzas.

Canavos, G. C. (1988) *Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos*. Primera edición Mc Graw-Hill/Interamericana de México, S.A de C.V

Colectivo *de Autores* (2008).*Curso breve de estadística*. Dpto. Estadística – informática. Facultad de Economía. Universidad de la Habana.

Darío Bacchini, R. (2018). *Introducción a la probabilidad y la estadística.* Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. Libro digital, PDF, Archivo Digital: ISBN 978-950-29-1734-4

Espallargas Ibarra, D. *Guía de Estadística Matemática para la Municipalización. Carrera de Contabilidad y Finanza*. Facultad de Economía. Dpto Estadística e Informática, Habana

González Rodríguez, E. Neninger Navarro, D. Pupo González, J. (2006) *Laboratorios de Estadística Matemática I y II.* Dpto. Estadística. Editorial Félix Varela. Habana.

Guerra Bustillo, C. W (2004). *Estadística*. Editorial Félix Varela. Habana.

Walpole Ronald, E. (2012) *Probabilidad y Estadística para Ingenieros y ciencia. Novena edición*. Pearson Educación. México.

ISBN: 978 - 959 - 16 - 4681 - 1