

# EL ÁLGEBRA LINEAL APLICADA A LA SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES

Lic. Yasell Sánchez Rodríguez<sup>1</sup>, MSc Boris Alvarez González<sup>2</sup>, MSc Irisdalys Pino Sanchez<sup>3</sup>

*1, 2, 3. Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”, Vía Blanca Km.3, Matanzas, Cuba.*

## Resumen

El Álgebra Lineal tiene una gran cantidad de aplicaciones sin embargo se suele abordar casi siempre de una forma bastante abstracta. Así que para motivar a nuestros estudiantes se propone realizar actividades académicas que hicieran uso de conceptos teóricos del Álgebra Lineal de una forma práctica, útil e interesante. Las imágenes digitales se pueden asociar a matrices donde cada elemento de la matriz coincide con el nivel de gris dentro de una escala de grises. Por este motivo, muchas herramientas del Álgebra Lineal son frecuentemente utilizadas en el procesamiento de imágenes. Por otro lado, se ha comprobado cómo nuestros estudiantes encuentran la asignatura más atractiva, a partir de esta vinculación de la Matemática a la vida práctica.

*Palabras claves: Motivación; álgebra lineal; imágenes.*

## Introducción

Las asignaturas de Matemáticas se suelen presentar como unas Matemáticas excesivamente teóricas y alejadas de las aplicaciones reales. Generalmente, los profesores de Matemáticas aplican o adecuan poco nuestras asignaturas al contexto en el que están. Este trabajo se va a centrar en la asignatura de Álgebra Lineal para Ingeniería Informática.

Basta con analizar lo que se hace en las universidades cubanas para comprobar que los programas, problemas, etc. de Álgebra Lineal son bastante parecidos en cualquier titulación universitaria. La mayoría de las veces, la parte práctica de la asignatura se reduce a la clásica relación de problemas tan habituales en Matemáticas.

Por supuesto, la relación de problemas debe formar parte de nuestro quehacer docente, pero en este trabajo se plantea hacer además algo más.

El objetivo que propuesto es de presentar a los alumnos aplicaciones prácticas del Álgebra Lineal en áreas de interés para un ingeniero. Con esto se pretende que los alumnos aprendan Álgebra Lineal sabiendo en qué temas relacionados con sus estudios se utilizan, para que así valoren más los conocimientos que están adquiriendo. Se busca así atraer el interés del alumnado y fomentar la motivación ya que de esa forma se mejora el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.

El Álgebra Lineal es una parte de las Matemáticas que está adquiriendo una gran importancia en los últimos años. Así, por ejemplo, las imágenes digitales en escala de grises no son más que matrices donde cada elemento de la matriz coincide con el nivel de gris del píxel correspondiente. Si la imagen es una imagen en color RGB entonces cada elemento de la matriz será una terna  $(r, g, b)$  con la cantidad de rojo, verde y azul presentes en el color del píxel correspondiente (el color es una combinación de los tres colores primarios, Red Green Blue), en definitiva, una imagen en color se corresponde con tres matrices. Por esta razón, en el procesamiento de imágenes digitales se utilizan muchas técnicas del cálculo matricial.

En este trabajo se destacan algunas de las aplicaciones del Álgebra Lineal al procesamiento de imágenes digitales:

- La compresión JPEG de una imagen se implementa a través de un producto matricial con matrices ortogonales.
- La edición de imágenes para hacer un fotomontaje se puede llevar a cabo resolviendo un sistema lineal de ecuaciones.
  
- El coloreado de una imagen digital en escala de grises puede hacerse resolviendo también un sistema lineal de ecuaciones.
  
- Etc.

El análisis de imágenes comprende todos los métodos y técnicas que se utilizan para extraer información de una imagen. El primer paso para ello lo constituye la segmentación de imágenes que se ocupa de descomponer una imagen en sus partes constituyentes, es decir, los objetos de interés y el fondo, basándose en ciertas características locales que nos permiten distinguir un objeto del fondo y objetos entre sí.

Se puede distinguir entre segmentación completa, cuando las regiones disjuntas corresponden directamente a objetos de la imagen y segmentación parcial, cuando las regiones no se corresponden directamente con objetos de la imagen. Para conseguir la segmentación completa se necesita un nivel superior de conocimiento que utiliza un conocimiento específico del dominio de la escena.

Este conocimiento de nivel superior puede ser, por ejemplo, que los objetos de la imagen corresponden a caracteres numéricos o letras de un alfabeto.

La operación de segmentación trata de distinguir si un píxel pertenece, o no, a un objeto de interés y, por lo tanto, produce una imagen binaria. Todavía no hay una teoría unificada de la segmentación de imágenes, solamente se dispone de un conjunto de algoritmos.

## **Desarrollo**

Los algoritmos de segmentación de imágenes monocromáticas se basan en alguna de las tres propiedades siguientes:

- a) Discontinuidad en los tonos de gris de los píxeles de un entorno, que permite detectar puntos aislados, líneas y aristas (bordes).
- b) Similitudes en los tonos de gris de los píxeles de un entorno, que permite construir regiones por división y fusión, por crecimiento o por umbralización.
- c) Conectividad de los píxeles desempeña un papel importante en la segmentación de imágenes.

Recordemos que una región  $D$  se dice conexa o conectada si para cada par de píxeles de la región existe un camino formado por píxeles de  $D$  que los conecta. Un camino de píxeles es una secuencia de píxeles adyacentes (que pertenecen a su entorno inmediato).

Los métodos de segmentación se pueden agrupar en cuatro clases diferentes:

- a) Métodos basados en píxeles, que a su vez pueden ser:
  - locales (basadas en las propiedades de los píxeles y su entorno)
  - globales (basadas en la información global obtenida, por ejemplo, con el histograma de la imagen).
- b) Métodos basados en bordes.

c) Métodos basados en regiones, que utilizan las nociones de homogeneidad y proximidad geométrica, como las técnicas de crecimiento, fusión o división.

d) Métodos basados en modelos.

El primer paso en cualquier proceso de análisis de imagen es la segmentación. Mediante la segmentación vamos a dividir la imagen en las partes u objetos que la forman. El nivel al que se realiza esta subdivisión depende de la aplicación en particular, es decir, la segmentación terminará cuando se hayan detectado todos los objetos de interés para la aplicación. En general, la segmentación automática es una de las tareas más complicadas dentro del procesado de imagen.

Los algoritmos de segmentación de imagen generalmente se basan en dos propiedades básicas de los niveles de gris de la imagen: discontinuidad y similitud. Dentro de la primera categoría se intenta dividir la imagen basándose en los cambios bruscos en el nivel de gris. Las áreas de interés en esta categoría son la detección de puntos, de líneas y de bordes en la imagen. Las áreas dentro de la segunda categoría están basadas en las técnicas de umbrales, crecimiento de regiones, y técnicas de división y fusión. En este trabajo se presenta un algoritmo para segmentar imágenes empleando el método de la potencia, utilizando propiedades gráficas de semejanza, obteniendo así, buenos resultados.

La segmentación de la imagen consiste en subdividir la imagen en sus partes constituyentes y extraer aquellas partes de interés (objetos). La segmentación es un proceso de agrupamiento (clustering, en inglés). Al "clustering" también se le llama aprendizaje no supervisado y es una técnica poderosa en clasificación de patrones.

#### Proceso de Clustering

Dado un conjunto de objetos, el proceso de clustering debe encontrar grupos cuyos elementos sean similares entre sí, y a la vez diferentes a los elementos de los otros grupos. Los grupos con esas características son conocidos como clusters. Los objetos son representados por  $D$  atributos descriptores en forma de vectores en el espacio  $R^D$ , y con una medida de comparación de la similitud, como la distancia, se conformarían los clusters con objetos similares.

En el proceso de la conformación de los grupos, que en adelante será conocido como clustering, no existe conocimiento previo acerca de cómo se debe conformar un cluster; por tal motivo, el proceso de clustering es también conocido como Clasificación no supervisada. Los tipos de objetos varían de acuerdo con el contexto de la aplicación del clustering; por ejemplo, en las tareas de clasificación dentro del *data mining*, los objetos serán registros de la base de datos; en la recuperación de la información los objetos serían documentos; y en procesamiento de imágenes los objetos serán los píxeles que conforman la imagen. El clustering tiene múltiples aplicaciones dentro de las ciencias de la computación, como compresión de imágenes y voz digitalizadas ; en la recuperación de informaciones relacionadas ; en el *data mining*, donde se buscan grupos con ciertas características de interés (por ejemplo, descubrimiento de nuevos segmentos de clientes con

el fin de mejorar los servicios que brinda una determinada empresa); en la segmentación de imágenes para dividir la imagen en regiones homogéneas (según alguna característica de interés como la intensidad, color o textura), en aplicaciones médicas ,clasificación de imágenes satelitales en zonas (urbana, bosques, ríos).<sup>1</sup>

## Segmentación

La segmentación subdivide una imagen en sus partes constituyentes u objetos, con el fin de separar las partes de interés del resto de la imagen, por lo tanto el nivel al que se lleva a cabo esta subdivisión depende del problema a resolver.

Algunas de las tareas fundamentales del procesamiento digital de imágenes son: 1) Mejoramiento de una imagen digital con fines interpretativos, y 2) Toma de decisiones de manera automática de acuerdo al contenido de la imagen digital.

Una imagen puede ser definida como una función bidimensional de intensidad de luz  $f(x, y)$ , donde  $x$  e  $y$  representan las coordenadas espaciales y el valor de  $f$  en un punto cualquiera  $(x, y)$  es proporcional al brillo (o nivel de gris) de la imagen en ese punto. Una imagen digital es una imagen  $f(x, y)$  que se ha discretizado tanto en las coordenadas espaciales como en el brillo; y puede considerarse como una matriz cuyos índices de fila y de columna identifican un punto de la imagen y el valor del correspondiente elemento de la matriz indica el nivel de gris en ese punto. Los elementos de una distribución digital de este tipo se denominan elementos de la imagen o más comúnmente píxeles, abreviatura de su denominación inglesa "*picture elements*".

Los algoritmos de segmentación de imágenes monocromáticas generalmente se basan en una de las dos propiedades básicas de los valores del nivel de gris: discontinuidad y similitud. En la discontinuidad el método consiste en dividir una imagen basándose en los cambios bruscos del nivel de gris. Los temas más importantes en la discontinuidad son: a) detección de puntos aislados, y b) detección de líneas y c) detección de bordes de una imagen. En la similitud, se presenta la regularidad en los valores del nivel de gris, los principales métodos están basados en: a) umbralización, b) crecimiento de región, y c) división y fusión de regiones.<sup>2</sup> Técnicas basadas en agrupamiento de píxeles en regiones. Tienen un enfoque de clasificación de píxeles, donde:

- Las regiones resultantes deben tener cierto significado para el procesamiento posterior.
- Píxeles de regiones distintas deben ser no-similares.
- Píxeles de una misma región deben ser similares: niveles de gris, texturas, etc.<sup>3</sup>

A una imagen se le puede asociar una gráfica donde cada píxel representa un nodo y cada par de píxeles determina una arista con un peso asociado  $w_{ij}$  que depende de la similitud entre los píxeles, por ejemplo, en cercanía espacial o en afinidad de color. A su vez cada gráfica tiene algunas matrices asociadas. La segmentación de imágenes se traduce en una partición de la gráfica asociada, la que a su vez puede ser determinada estudiando las propiedades de las matrices asociadas.

Algunos conceptos importantes relacionados con las gráficas son:

-Gráfica: Es un par de conjuntos  $(V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito de puntos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  llamados vértices o nodos y  $E$  es un conjunto finito de aristas  $e_{ij}$ , cada uno de las cuales une pares ordenados de vértices y se les puede asignar un valor denotado por  $w_{ij}$ , el cual será el peso de la arista.

-Grado de un vértice: Si las aristas tienen un peso asignado, el grado del vértice es la suma de todos los pesos de las aristas que inciden en él. Se denota por  $d_i = \sum_j w_{ij}$ . Es frecuente tomar  $w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe la arista } e_{ij} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

en cuyo caso  $d_i$  es el número de aristas incidentes en el vértice  $i$ .

-Gráfica convexa: Una gráfica  $G$  es convexa si existe una arista entre cualesquiera dos de sus vértices.

-Subgráfica: Sea  $A(V_1; E_1)$  una gráfica,  $A$  es una subgráfica de  $G$  si  $V_1 \subset V$  y  $E_1 \subset E$ .

-Volumen de una subgráfica: Es la suma de los grados de los nodos que pertenecen a la subgráfica  $A$ . Se denota por  $V(A) = \sum_{i \in A} d_i$

-Corte de una gráfica: Es la suma de los pesos de las aristas que son eliminadas para particionar la gráfica. Se denota por  $Cut(A, B) = \sum_{i \in A, j \in B} w_{ij}$ .<sup>4</sup>

Para que  $Cut(A, B)$  no tienda a hacer particiones se introduce un nuevo criterio de partición, llamado corte normalizado, el cual se denota por  $NCut(A, B)$ . La siguiente relación muestra la correspondencia con el corte mínimo:

$$NCut(A, B) = \frac{Cut(A, B)}{V(A)} + \frac{Cut(A, B)}{V(B)}$$

-Matriz de Incidencia: Una gráfica no dirigida con  $n$  vértices y  $m$  aristas tiene asociada una matriz, llamada matriz de incidencia, formada de la siguiente manera: en la columna correspondiente a una arista  $e$  hay un 1 en el renglón correspondiente a un vértice de  $e$  y un -1 en el renglón correspondiente al otro vértice de  $e$  y el resto de los elementos de esa columna son cero.

-Matriz de Adyacencia: Si  $G$  es una gráfica con  $n$  vértices la matriz  $A(G)$  de dimensión  $n \times n$ , cuyo elemento  $a_{ij}$  es 1 si existe la arista  $e_{ij}$  y cero en otro caso, es llamada matriz adyacente de  $G$ .

-Matriz diagonal de grados: Es una matriz diagonal denotada por  $D$ , donde el elemento  $(i, i)$  es igual al grado del nodo  $i$ , en términos de  $A(G)$ ,  $d_i = \sum_j a_{ij}$ .<sup>5</sup>

Cociente de Rayleigh

Si nos limitamos a calcular la sucesión  $(X_n)$  hasta obtener una aproximación  $x$  adecuada del vector propio se puede obtener el valor propio resolviendo el sistema vectorial  $\lambda = Ax$ . Este sistema resulta, en general, incompatible por no ser  $x$  exactamente un vector propio sino sólo una aproximación, por lo que la solución que mejor se ajusta es la pseudosolución del sistema, que nos dará una aproximación del valor propio  $\lambda$ .

$$\lambda x^* x = x^* x A \rightarrow \lambda = \frac{x^* x A}{x^* x}$$

Dada una matriz cuadrada  $A$  y un vector  $x$ , se denomina cociente de Rayleigh del vector  $x$  respecto de la matriz  $A$  al cociente  $\frac{x^* x A}{x^* x}$ .

Se puede, por tanto, obtener una aproximación del vector propio por un método iterado para más tarde aproximar el valor propio mediante el cociente de Rayleigh.

### Matriz Laplaciana

Matriz Laplaciana: Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y un conjunto  $E$  de aristas. El Laplaciano de  $G$ , denotado por  $L(G)$ , es una matriz de dimensión  $n \times n$  con elementos:

$$L_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

que es lo mismo que  $L(G) = D - A$ .

### Propiedades

1.  $L = D - A$ , donde  $A$  es la matriz adyacente y  $D$  es la matriz diagonal de grados
2.  $L = I_G T_G T_G^T$ , donde  $I_G$  es la matriz de incidencia de  $G$ .
3.  $L$  es una matriz simétrica semidefinida positiva. Así, todos los valores propios de  $L$  son reales y no negativos,  $L$  tiene un conjunto completo de  $n$  vectores propios reales y ortogonales.
4. Si la gráfica  $G$  tiene  $c$  componentes conexas, entonces  $L$  tiene  $c$  valores propios que son iguales a 0.
5. Para cualquier vector  $x$ ,

$$x^T L x = \sum_{\{i,j\} \in E} E_{ij} (x_i - x_j)^2$$

6. Para algún vector  $x$ , y los escalares  $\alpha$  y  $\beta$   $(\alpha x + \beta e)^T L (\alpha x + \beta e) = \alpha^2 x^T L x$  donde  $e = [1, 1, \dots, 1]^T$  de dimensión  $n$ .

## Teorema de Fielder

Teorema (Fielder): Sea  $G$  una gráfica convexa,  $L$  el Laplaciano de  $G$ ;  $G_1$  y  $G_2$  una partición de  $G$ , entonces:

$$\lambda_2 = \frac{y_2^T D^{-1/2} L D^{-1/2} y_2}{y_2^T y_2}$$

Donde  $\lambda_2$  es el segundo valor propio más pequeño del Laplaciano Normalizado  $D^{-1/2} L D^{-1/2}$  y  $y_2$  es su correspondiente vector propio.

El signo de los elementos de  $y_2$  determinan la partición  $G_1; G_2$  a saber  $i \in G_1$  si  $y_i > 0$ ,  $i \in G_2$  si  $y_i < 0$ . El valor propio  $\lambda_2$  es conocido como el valor propio de Fielder y  $y_2$  como el vector propio de Fielder.

## Corte normalizado

El criterio de corte normalizado de gráficas se puede aplicar a una imagen puesto que en este caso cada píxel de la imagen representa un nodo en la gráfica y cada par de píxeles determina una arista. Los pesos de las aristas que unen los vértices deben reflejar la probabilidad de que dos píxeles pertenezcan a un mismo objeto dentro de la imagen. En imágenes de intensidad tradicionales es posible utilizar el valor de intensidad del píxel y su ubicación espacial. Los pesos de cada arista se pueden calcular por la siguiente función de

afinidad:  $w_{ij} = e^{-\frac{\|F(i) - F(j)\|_2^2}{\|\sigma_F^2\|_2^2}} * e^{-\frac{\|X(i) - X(j)\|_2^2}{\|\sigma_X^2\|_2^2}}$  donde  $F(i)$  y  $F(j)$  son las intensidades de los nodos  $i$  y  $j$  respectivamente,  $\|F(i) - F(j)\|_2^2$  representa la afinidad que hay entre cada par de píxeles,  $X(i)$  y  $X(j)$  son las coordenadas dentro de la matriz de los nodos  $i$  y  $j$  respectivamente, y  $\|X(i) - X(j)\|_2^2$  es la distancia entre los píxeles  $i$  y  $j$ ;  $\|\sigma_F^2\|_2^2$  y  $\|\sigma_X^2\|_2^2$  son la varianza de la afinidad y la asociación respectivamente.

Cuando las imágenes están en escala de grises, a cada píxel se le hace corresponder un tono de gris y una ubicación dentro de la imagen.<sup>1</sup>

## Método de la Potencia

Este método calcula el valor propio de máximo módulo de la matriz  $A$  y el vector propio asociado. Considerando  $\lambda_1$  como el valor propio de máximo módulo, la forma de calcularlo es aplicando la siguiente recurrencia según García:

$$y^{(k)} = A y^{k-1} = A^{(k)} y^{(0)} \text{ con } k=1,2,\dots \text{ y } \frac{y_p^{(k+1)}}{y_p^{(k)}} \rightarrow \lambda_1$$

Para que se pueda aplicar es necesario que:



- $\lambda_1$  es tal que domina a todos los demás valores propios, es (estrictamente mayor):  
Por tanto, si  $\lambda_1$  es complejo no nos sirve, ya que existe otro valor propio con el mismo módulo, su conjugado.
- La matriz A sea diagonalizable. Una matriz A es diagonalizable si y solo si dado un conjunto de vectores  $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}\}$ , estos son base de  $\mathbb{R}^n$

Se construye por tanto la sucesión:

$$y^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v^{(i)}$$

$$y^{(1)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A v^{(i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v^{(i)}$$

$$y^{(2)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v^{(i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^2 v^{(i)}$$

.

.

.

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^m v^{(i)}$$

$$= \lambda_1^m (\alpha_1 v^{(1)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} v^{(i)})$$

Al hacer el límite,  $\lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = C v^{(1)}$  con  $C = \lambda_1^m \alpha_1$

Y ahora se construye otra sucesión

$$\mu_{m+1} = \frac{y_k^{(m+1)}}{y_k^{(m)}} = \frac{\lambda_1^{m+1} (\alpha_1 v_k^{(1)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} v_k^{(i)})}{\lambda_1^m (\alpha_1 v_k^{(1)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} v_k^{(i)})}$$

Donde  $v_k$  es la k-ésima componente del vector v y  $y_k$  la del vector y.<sup>6</sup>

Para esta sucesión, si  $\alpha_1 \neq 0$  y  $v_k^{(1)} \neq 0$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{m+1} = \lambda_1$ . Si  $\lambda_1 > 1$ , entonces  $C \rightarrow \infty$ , mientras que si  $\lambda_1 < 1$ ,  $C \rightarrow 0$ , por lo que suele ser recomendable normalizar la sucesión, por ejemplo con la norma infinito:

$$p/|y_p^{(k)}| = \|y^{(k)}\|_\infty \rightarrow z^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{y_p^{(k)}} \text{ entonces } z_p^{(k)} = 1 \text{ o } z_p^{(k)} = -1$$

Ahora la recurrencia nos queda

$$z^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{y_p^{(k)}}$$

$$y^{(k+1)} = Az^{(k)}$$

$$\mu_k = y_p^{(k+1)}$$

Usando el cociente de Rayleigh

$$\sigma_{k+1} = \frac{y^{(k)t} Ay^{(k)}}{y^{(k)t} y^{(k)}} = \frac{\|y^{(k)}\|_2 y^{(k)t} Ay^{(k)}}{\|y^{(k)}\|_2 y^{(k)t} y^{(k)}} = \frac{z^{(k)t} Az^{(k)}}{z^{(k)t} z^{(k)}} = \frac{z^{(k)t} y^{(k+1)}}{\|z^{(k)}\|_2^2}$$

Como  $\|z^{(k)}\|_2^2 = 1$ , entonces nos queda que el valor propio  $\sigma_{k+1}$  con vector propio asociado  $y^{(k)}$  es  $\sigma_{k+1} = z^{(k)t} y^{(k+1)}$

Vimos que de la forma anterior, el valor propio es:

$$\mu_m = \lambda_1 + o\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m\right)$$

Mientras que, usando el coeficiente de Rayleigh tenemos

$$\sigma_m = \lambda_1 + o\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2m}\right)$$

Por tanto, usando el coeficiente de Rayleigh tiende más rápido al valor propio de mayor módulo. (Bustince, 2010).

Método de deflación

Este método lo que hace es “desinflar” el problema. Se utiliza un valor propio  $\lambda_1$  y un vector propio  $v^{(1)}$  para transformar A y obtener otro valor propio como valor propio de mayor módulo de una matriz de orden inferior.

Hay varias técnicas, alguna de las cuales vamos a comentar.

La deflación consiste en construir la matriz B transformando A de la siguiente forma:  

$$B = A - \lambda_1 v^{(1)} x^t$$

Conociendo  $\lambda_1$  y  $v^{(1)}$  (valor propio de mayor módulo de A y su vector propio asociado).

Se quiere que  $B = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  siendo  $\lambda_i$  para  $i = 2:n$  los valores propios de la matriz A que nos faltan por calcular. Para ello,

$$Bv^{(1)} = Av^{(1)} - \lambda_1 v^{(1)} x^t v^{(1)} = 0v^{(1)} \Rightarrow x^t v^{(1)} = 1$$

Por tanto, se busca  $x^t v^{(1)} = 1$

Vamos a ver dos de las técnicas de deflación: la deflación de Hotelling y la de Wielandt. Hay otra que es la deflación por semejanza, pero no la vamos a ver. (Burden y Faires, 2010).

- Deflación de Hotelling: se usa para matriz A simétrica

$$x^t = \frac{v^{(1)t}}{\|v^{(1)}\|_2}$$

- Deflación de Wielandt:

$$Av^{(1)} = \lambda_1 v^{(1)}$$

$$\alpha_i v^{(1)} = \lambda_1 v_i^{(1)} \text{ con } v_i^{(1)} \neq 0$$

Siendo  $\alpha_i$  la fila i de la matriz A y  $v_i^{(1)}$  la componente i del vector propio asociado a  $\lambda_1$ .

$$\frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}} \alpha_i v^{(1)} = 1 \Rightarrow b_i = 0 \Rightarrow \hat{B} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

Así que hay que quitar la fila i y columna i de la matriz B.<sup>3</sup>

Teorema: Supongamos que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son valores propios de A con sus vectores propios asociados  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$  y  $\lambda_1$  tiene multiplicidad 1. Sea x un vector tal que  $x^T v^{(1)} = 1$ . Entonces la matriz  $B = A - \lambda_1 v^{(1)} x^T$  tiene valores propios  $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  con vectores propios  $v^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, \dots, w^{(n)}$  donde  $v^{(i)}$  y  $w^{(i)}$  se relacionan mediante la ecuación:

$$v^{(i)} = (\lambda_i - \lambda_1) w^{(i)} + \lambda_1 (x^T w^{(i)}) v^{(1)}, \text{ para cada } i = 2, 3, \dots, n. \text{ (Burden \& Faires, 2010)}$$

**ALGORITHM 9.4**

### Wielandt Deflation

To approximate the second most dominant eigenvalue and an associated eigenvector of the  $n \times n$  matrix  $A$  given an approximation  $\lambda$  to the dominant eigenvalue, an approximation  $\mathbf{v}$  to a corresponding eigenvector, and a vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ;

**INPUT** dimension  $n$ ; matrix  $A$ ; approximate eigenvalue  $\lambda$  with eigenvector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ; vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , tolerance  $TOL$ , maximum number of iterations  $N$ .

**OUTPUT** approximate eigenvalue  $\mu$ ; approximate eigenvector  $\mathbf{u}$  or a message that the method fails.

**Step 1** Let  $i$  be the smallest integer with  $1 \leq i \leq n$  and  $|v_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |v_j|$ .

**Step 2** If  $i \neq 1$  then  
 for  $k = 1, \dots, i-1$   
 for  $j = 1, \dots, i-1$   
 set  $b_{kj} = a_{kj} - \frac{v_k}{v_i} a_{ij}$ .

**Step 3** If  $i \neq 1$  and  $i \neq n$  then  
 for  $k = i, \dots, n-1$   
 for  $j = 1, \dots, i-1$   
 set  $b_{kj} = a_{k+1,j} - \frac{v_{k+1}}{v_i} a_{ij}$ ;  
 $b_{jk} = a_{j,k+1} - \frac{v_j}{v_i} a_{i,k+1}$ .

**Step 4** If  $i \neq n$  then  
 for  $k = i, \dots, n-1$   
 for  $j = i, \dots, n-1$   
 set  $b_{kj} = a_{k+1,j+1} - \frac{v_{k+1}}{v_i} a_{i,j+1}$ .

**Step 5** Perform the power method on the  $(n-1) \times (n-1)$  matrix  $B^i = (b_{kj})$  with  $\mathbf{x}$  as initial approximation.

**Step 6** If the method fails, then OUTPUT ("Method fails");  
 STOP  
 else let  $\mu$  be the approximate eigenvalue and  
 $\mathbf{w}^i = (w_1^i, \dots, w_{n-1}^i)^T$  the approximate eigenvector.

**Step 7** If  $i \neq 1$  then for  $k = 1, \dots, i-1$  set  $w_k = w_k^i$ .

**Step 8** Set  $w_i = 0$ .

**Step 9** If  $i \neq n$  then for  $k = i+1, \dots, n$  set  $w_k = w_{k-1}^i$ .

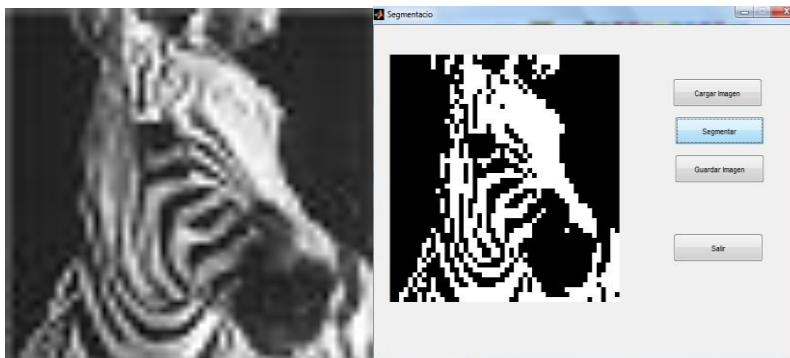
**Step 10** For  $k = 1, \dots, n$   
 set  $u_k = (\mu - \lambda)w_k + \left( \sum_{j=1}^n a_{kj} w_j \right) \frac{v_k}{v_i}$ .  
 (Compute the eigenvector using Eq. (9.6).)

**Step 11** OUTPUT  $(\mu, \mathbf{u})$ ; (The procedure was successful.)  
 STOP.

Figura tomada de Burden & Faires<sup>7</sup>.

### Propuesta de Solución e Interfaz Gráfica

Todos los métodos y funciones que se usarán para darle solución al problema han sido implementado en MATLAB y los respectivos archivos .m. A continuación se dará una breve descripción del funcionamiento de la interfaz gráfica.

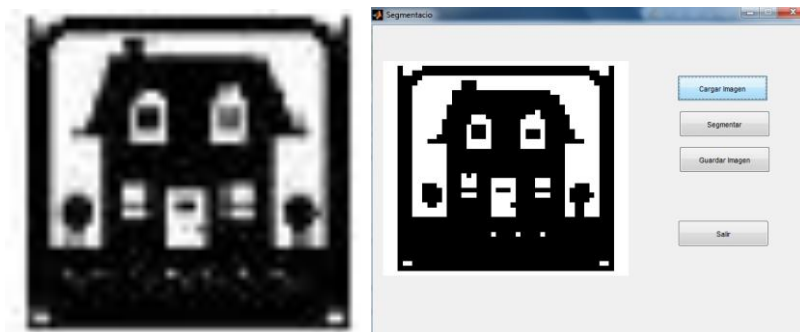
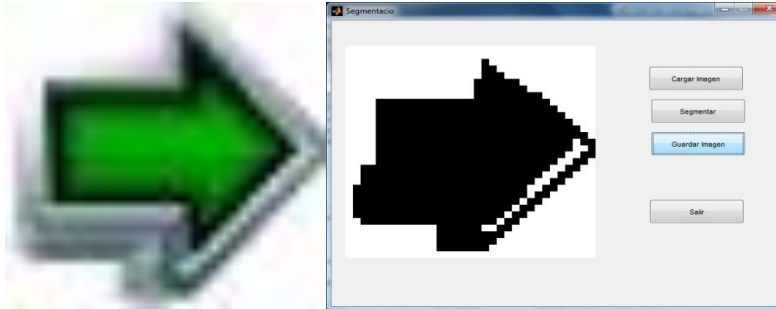


En esta ventana aparecen tres botones uno de ellos es el de cargar la imagen, el otro es para segmentarla y el último para guardarla si el usuario lo desea. Además, cuando el usuario

toque el botón de segmentar, después que el programa segmente la imagen, se mostrará la imagen segmentada.

## Resultados

Se muestran aquí algunos resultados obtenidos con la foto original y la imagen segmentada por la aplicación:



## Conclusiones

Se ha intentado trabajar dentro de la asignatura Álgebra Lineal de una forma diferente de la habitual en clase de Matemáticas. No sólo se dedica a las clásicas sesiones de teoría y problemas en el aula, sino que además se introducirían aplicaciones útiles de los contenidos matemáticos estudiados en el aula a temas de interés para el alumnado. De esta forma se persigue motivar más a nuestros alumnos en el aprendizaje de la asignatura. Se ha procurado abordar temas actuales y cuya relevancia para un ingeniero técnico informático fuera indiscutible. Se cree que el resultado ha sido globalmente satisfactorio.

Se ha comenzado un material que será válido para cursos posteriores y que, por supuesto, se ampliará y mejorará. Las actividades estarán diseñadas para su uso por estudiantes de Ingeniería Informática pero también se pueden aprovechar para otras carreras, sobre todo para otras ingenierías. Desde este trabajo se anima a los profesores de Matemáticas a trabajar en ideas similares.

### **Referencias bibliográficas**

HERVELLA, Samira. *Editor de Imágenes basado en Regiones. Aplicación en entorno Matlab*. Tecno Libro: Barcelona, 2006.

LA SERNA, Nora., y ROMÁN, Ulises. *Técnicas de Segmentación en Procesamiento Digital de Imágenes*. DELMMI: San Marcos, 2007.

BUSTINCE, Humberto. *Procesamiento de imagen. Utilización de técnicas de toma de decisión y aprendizaje*. . Navarra: EUNSA. 2010

ÁVALOS, Gonzalo. *Segmentación de imágenes mediante teoría espectral de gráficas*. Era: Cohauila, 2007.

LORENTI, Luciano. *Segmentación espectral de imágenes obtenidas con cámaras de tiempo de vuelo*. Atlante: La plata, 2014.

GARCÍA, Carlos. *Apuntes de Métodos Numéricos, 2o E.T.S.I.* . Oceano: Málaga, 2003.

BURDEN, Richard y FAIRES, Douglas. *Numerical Analysis*. Youngstown: Brooks/Cole. 2010.