CONSIDERACIONES DE ANALOGÍA EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

MSc. Bernardino Alfredo Almeida Carazo[1], MSc. Raynelis León Paredes[2]

1. Universidad de Matanzas, bernardino.carazo@umcc.cu

2. Universidad de Matanzas, raynelis.leon@umcc.cu

Resumen

El objetivo de la monografía es mostrar vías para el aprendizaje consciente del establecimiento de analogías en la enseñanza de la Matemática y favorecer el desarrollo del pensamiento de los estudiantes. Se hace una sistematización de la analogía como factor heurístico positivo, a partir del análisis de la revisión bibliográfica y vivencias del desempeño profesional de los autores, expresada en consideraciones teóricas y de la práctica escolar, precisando su contribución al aprendizaje de la Matemática en tres direcciones: descubrir una proposición nueva y formularla; sugerir el método y el procedimiento para la demostración de la nueva proposición y sugerir la vía para la resolución de un problema (ejercicio). Se ejemplifica la implementación del principio de analogía en esas direcciones, con sugerencias didácticas para su aprendizaje e impulsos útiles para favorecer el desarrollo intelectual.

Palabras claves*: Analogía; principio de analogía; heurística; aprendizaje de la Matemática.*

Monografías 2020

ISBN: 978-959-16-4472-5

Introducción

Los objetivos declarados para la enseñanza de la Matemática en los diferentes niveles educativos, determinan la necesidad de considerar un concepto amplio del contenido de enseñanza, como parte esencial de la cultura, específica en diferentes profesiones y especialidades. Esta categoría en la asignatura Matemática (en sentido amplio) incluye: (1) el sistema de conocimientos sobre conceptos de objetos, relaciones y operaciones, las proposiciones y procedimientos de solución, (2) el sistema de habilidades y hábitos, (3) el sistema de experiencias de la actividad creadora que incluye los métodos de la actividad cognoscitiva para la resolución de problemas y las situaciones significativas en las que adquiere sentido el contenido matemático para los alumnos y (4) el sistema de relaciones con el mundo que incluye: convicciones filosóficas, políticas, morales e ideológicas fundamentales, relacionadas con la ciencia matemática o que resultan directamente de ella y cualidades de la personalidad.

En consecuencia, la asimilación del contenido matemático refuerza la instrucción, el desarrollo y la educación de los alumnos, en consonancia con los objetivos que se plantean en los programas (Ballester, et al., 2018). Por tanto, la formación matemática desde edades tempranas, es base y parte esencial de la formación politécnica de los estudiantes, se constituye en un objetivo general de la escuela y por tanto el propósito fundamental de la enseñanza de la Matemática.

Para el desarrollo intelectual de los estudiantes se declaran pautas, en los programas de los diferentes grados de esta asignatura, los objetivos expresan la contribución que debe hacer la enseñanza de la Matemática al desarrollo de capacidades intelectuales, formas de trabajo y razonamiento, así como hábitos de trabajo intelectuales que son esenciales para la actividad matemática.

Es propósito esencial de la enseñanza de la Matemática desarrollar el pensamiento en general de los estudiantes, para ello es necesario que realicen una constante actividad intelectual elevada; que demande analizar, sintetizar, comparar, clasificar, generalizar, particularizar, abstraer y concretar. El proceso del pensar se estimula y desarrolla al enfrentarse a tareas mentales desafiantes y exigentes para el sujeto que aprende.

Las formas de trabajo y de pensamiento matemático requieren del ejercicio sistemático de estas operaciones mentales y son un componente importante para la racionalización del trabajo mental, posibilitan encontrar nuevos conocimientos y desarrollar habilidades y hábitos intelectuales que exige toda actividad matemática. Para ello, es necesario concientizar cómo se aplican en el tratamiento de un contenido matemático, de manera que se logre su empleo de forma activa por los estudiantes, formulando para ello impulsos apropiados. Estas formas son: variación de condiciones, búsqueda de relaciones y consideraciones de analogía.

ISBN: 978-959-16-4472-5

¿De qué manera adiestrar al estudiante para hacer consideraciones de analogía al aprender Matemática? Es objetivo de este trabajo responder a esta pregunta, mostrando vías para el aprendizaje consciente del establecimiento de analogías en la asignatura Matemática y favorecer el desarrollo del pensamiento de los estudiantes.

Desarrollo

Lograr que los estudiantes aprendan las formas de trabajo y pensamiento fundamentales de la ciencia matemática en el aprendizaje de la asignatura Matemática es una impostergable tarea, pues es contenido de su enseñanza y constituye un componente esencial para la racionalización del trabajo mental, condición indispensable en toda actividad matemática.

Es conveniente aclarar que el empleo por el profesor de las formas de trabajo y de pensamiento matemático en la clase no es suficiente para que los estudiantes las aprendan. Se requiere que el profesor formule impulsos que estimulen su aplicación y participación activa, en los procesos de búsqueda del conocimiento y que siempre propiciar un espacio de la clase para hacer consciente la importancia de su uso y cómo fue empleada.

Analogía, del griego *αναλογία* (*ana* -reiteración o comparación- y *logos*, razón), significa comparación o relación entre varias razones o conceptos; comparar o relacionar dos o más seres u objetos, a través de la razón, señalando características generales y particulares, generando razonamientos basados en la existencia de semejanzas entre estos, aplicando a uno de ellos una relación o una propiedad que está claramente establecida en el otro (Fundación Wikimedia, 2013).

Hacer consideraciones de analogía es una habilidad del pensamiento, solicita de la observación, la comparación y las conexiones entre objetos diversas según la presencia de una propiedad, para incorporar rasgos nuevos a los conocimientos que hemos adquirido anteriormente, permitiendo adquirir más información sobre una problemática analizada.

En el Diccionario de la lengua española se dan varias acepciones de analogía: (1) Relación de semejanza entre cosas distintas, (2) Razonamiento basado en el razonamiento de atributos semejantes en seres o cosas diferentes (Real Academia Española, 2020). Ofrece además, otros significados refiriéndose a otras ciencias como la Biología, el Derecho, la Gramática y la Lingüística.

En la Didáctica de la Matemática en la formación de Licenciados en Educación Matemática está considerada una forma de trabajo y pensamiento matemático y se denomina "consideraciones de analogía" señalando que se establecen sobre la base de aspectos similares, semejantes o parecidos entre hechos, estructuras o fenómenos. Estas pueden referirse tanto al contenido como a las semejanzas formales. El descubrimiento (y establecimiento) de una analogía permite transferir los resultados y métodos de un complejo de contenido a otro semejante o análogo.

Por ejemplo, una vez que los alumnos conocen que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero fue hallada mediante la descomposición en triángulos, por analogía puede hallarse la suma de los ángulos interiores de cualquier otro polígono convexo (Ballester, et al., 2018).

Hay que hacer participar a los alumnos activamente de ellas mediante impulsos a su actividad intelectual tales como: ¿Se nos ha presentado este caso antes?, ¿Cómo eran las condiciones?, ¿Cómo se ha procedido en casos similares?, Vea el proceder empleado en el ejercicio de la clase de ayer y analiza si es aplicable en este, ¿Qué ejercicios semejantes has resuelto ya?, ¿Cómo se procedió?, Recuerden cómo se procedió en la demostración del ejercicio (teorema)… A estas formas de trabajo y pensamiento matemáticos se puede contribuir mediante el uso de asistentes matemáticos que permiten un enfoque dinámico del tratamiento de los contenidos.

El trabajo racional crea condiciones para el desarrollo de la actividad creadora y exige de los alumnos una planificación, organización, ejecución y control adecuados de la actividad, condicionada por el dominio de los contenidos matemáticos que se deben aplicar. Para ello se requiere aprovechar determinados medios, algoritmos y formas de trabajo y pensamiento que racionalizan el esfuerzo mental y contribuyen a que el tiempo disponible se utilice con efectividad (Álvarez, 2014).

En el tratamiento metodológico de los procedimientos de solución (algorítmicos y heurísticos) que se estudia en la carrera de Licenciatura en Educación Matemática en las universidades cubanas, se trabaja la analogía como un principio heurístico general porque es´de gran utilidad para la búsqueda de nuevos conocimientos y también sugieren ideas para la solución de diferentes problemas y al respecto se realizan algunas precisiones.

En la Didáctica de la Matemática se considera que el principio de analogía consiste en la utilización de semejanzas de contenido o forma entre: los elementos del objeto que se estudia, entre objetos o clases de objetos y entre sistemas que se deben relacionar (Almeida y Valdivia, 2009).

Al respecto, Polya, G. destacado profesor de Matemática húngaro, expresa que analogía es una especie de semejanza. Es, diríamos semejanza sobre un nivel definido y conceptual. La diferencia esencial entre analogía y otras clases de semejanza yace, en las intenciones del pensador. Objetos semejantes son aquellos que concuerdan entre sí. Dos sistemas son análogos si concuerdan en relaciones claramente definibles de sus partes respectivas (Polya, 1966).

Por otra parte el Dr. Horst Müller considera que el principio de analogía puede ser aplicado en las dos formas siguientes:

a) Se resuelven primeramente algunos casos especiales y se trata de generalizar la vía de solución utilizando las analogías encontradas.

ISBN: 978-959-16-4472-5

b) Se buscan prototipos de ejercicios ya conocidos, se determinan los aspectos comunes y las diferencias entre el prototipo y el ejercicio planteado y se trata de resolver este último, utilizando los aspectos comunes y variando la vía de solución, teniendo en cuenta las diferencias determinadas (Müller, s/f).

Estas formas se ajustan en el trabajo con ejercicios en la enseñanza de la Matemática

Ejemplo 1 (para a). Por inducción se puede llegar a obtener la fórmula que expresa el número total de diagonales de un polígono en dependencia de la cantidad de lados.

Se recomienda la confección de una tabla para establecer las analogías y obtener la fórmula.
n: Número de lados del polígono
n – 3: Número de diagonales que se trazan desde un vértice.
n (n – 3): Cantidad de diagonales trazadas en el polígono.
d: Diagonales que posee

n	3	4	5	6	7
n - 3	0	1	2	3	.
n(n -3)	0	4	10	18	.
d	0	2	5	9	.

Observando los valores aportados por la tabla se deben buscar las analogías y descubrir la necesidad de dividir por 2 la cantidad de diagonales trazadas porque entre dos vértices no consecutivos se traza solo una $\frac{n(n-3)}{2} = d$ (Se obtiene la generalización sobre la base de las analogías encontradas en los casos particulares).

Ejemplo 2 (para a). Al elaborar las propiedades de las operaciones con potencias, puede indicarse la tarea siguiente:

- Exprese en cada inciso los productos en una sola potencia:
  a) $3^3 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^5$
  b) $2 \cdot 2^3 =$
  c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$
  d) $(-0{,}3)^3\ (-0{,}3)\ (-0{,}3)^2 =$
  e) $a^n \cdot a^m = \underbrace{(a.a...a)}_{n\ veces} \cdot \underbrace{(a.a...a)}_{m\ veces} = a^{m+n}$

Enuncie una propiedad para un producto de potencias de igual bases

Ejemplo (para b). La analogía en esta situación se emplea para resolver un problema en el que se requiere encontrar una regularidad a partir de un comportamiento similar en los casos presentados, debe descubrirse la relación que se manifiesta en el sumando y suma conocida en cada caso particular.

Problema: Observe el patrón numérico en cada expresión y encuentre el número que corresponde a cada variable para que se cumpla la igualdad.

ISBN: 978-959-16-4472-5

a) a + 45 = 101	a = 56
b) b + 445 = 1 001	b = 556
c) c + 4 445 = 10 001	c = 5556
d) d + 44 445 = 100 001	d = 5556

e) Si continúas el patrón, ¿cuál será el valor de las variables **f** y **g**? en la expresión:

f + g = 100 000 001 (Respuesta: f = 55555556 y g = 44444445)

Se puede estimular el empleo del principio de analogía en la búsqueda de la solución formulando impulsos como los siguientes:

a) ¿Qué se conoce en cada expresión? ¿Y qué se busca en cada caso?

b) ¿Qué procedimiento seguir para hallar el valor desconocido en cada expresión?

c) ¿Qué relaciones puedes encontrar entre los valores hallados, el segundo sumando y la suma?

d) ¿Cuáles son entonces los valores de las variables f y g?

Para la solución del inciso e, se requiere observar detenidamente el patrón y buscar los valores de las variables en cada expresión, establecer en cada igualdad las analogías que se observan entre la cantidad de ceros del resultado y de los dígitos 4, 5 y 6 en los sumandos. Esta forma de analogía se aplica en cada elaboración inductiva de procedimientos.

En sus lecciones de Metodología de la Enseñanza de la Matemática, el profesor soviético Dr.C. Nikolai Petrov expresa (Ballester,et al. 2001):

"La analogía, como un factor heurístico positivo, puede ayudar en tres direcciones:

1. puede aplicarse para que los alumnos descubran una proposición nueva para ellos, y la formulen;

2. puede sugerir el método y el procedimiento para la demostración de una proposición nueva;

3. puede sugerir la vía para la resolución de un problema, de un ejercicio."

Resulta conveniente ofrecer ejemplos que ilustren el empleo del principio de analogía en cada una de las direcciones anteriores. El razonamiento por analogía, se realiza de lo particular a lo particular, es decir, datos particulares permiten establecer comparaciones que llevan a una conclusión por analogía.

Primera dirección:

Ejemplo 1. La fórmula para el cálculo del volumen de la pirámide se obtiene a partir de la comparación con un prisma de igual base e igual altura. Análogamente se precede para obtener la fórmula para el cálculo del volumen de un cono circular recto, comparándolo con el cilindro de igual área de la base e igual altura.

Segunda dirección:

Ejemplo 1. La igualdad de lados opuestos, en paralelogramos, se demuestra probando la igualdad de los triángulos formados por el trazado de una diagonal, para demostrar la igualdad de ángulos opuestos en un paralelogramo se procede de igual modo.

Ejemplo 2. En la demostración del teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un polígono, a partir de como se demostró para el caso particular del cuadrilátero, se determina el método a emplear para un polígono de n lados, considerando las analogías que se observan en los pentágonos, hexágonos, etc.

Ejemplo 3. En la demostración del teorema que expresa la relación entre el ángulo central y el inscrito sobre un mismo arco, se hace una diferenciación de casos y se considera el caso especial en que uno de los lados del ángulo inscrito es diámetro. Los otros dos casos (cuando el centro de la circunferencia está en el interior del ángulo inscrito o es un punto exterior) se demuestran análogamente utilizando sumas y diferencias del caso especial.

Se observa en estos ejemplos una de las formas de utilización de la analogía: se demuestran algunos casos especiales y se trata de generalizar la vía de solución utilizando las analogías encontradas.

Tercera dirección:

Ejemplo 1. La determinación de valores funcionales para ángulos cualesquiera, utilizando las fórmulas de reducción, se trabaja de modo análogo.

Ejemplo 2. Los problemas de reparto proporcional se resuelven, en general análogamente.

Ejemplo 3. Los problemas de cálculo porcentual, para cada uno de los tres casos se resuelven de forma similar.

Ejemplo 4. Se plantea el problema: Hallar el perímetro (o longitud) de una circunferencia.

Para estimular el empleo de la analogía en la búsqueda de la fórmula se debe preguntar:

a) En un polígono regular de n lados, ¿De cuál de sus elementos depende el valor de su perímetro?

ISBN: 978-959-16-4472-5

b) Y en una circunferencia ¿De qué elemento dependerá el valor de su perímetro (o longitud)?

Con estas interrogantes se incita el razonamiento por analogía, en pensar que en los polígonos regulares, depende de la longitud del lado, luego en la circunferencia depende de la longitud del diámetro.

En este caso se aprecia otra de las formas de utilización de la analogía, que consiste en buscar prototipos de ejercicios ya conocidos, determinar los aspectos comunes y las diferencias entre los prototipos y el ejercicio planteado, y tratar de resolver éste utilizando los aspectos comunes y variando la vía de solución de acuerdo con las diferencias encontradas.

En el proceso pedagógico el rol de la analogía como un factor heurístico positivo posee gran significación en la obtención de diferentes conocimientos y vías de solución de diferentes problemas y ejercicios.

El principio de analogía como procedimiento de solución significa comparar o relacionar las tareas y las experiencias acumuladas al resolverlas, apreciando similitudes que permitan generar razonamientos y conductas para avanzar en el proceso de búsqueda (Villegas, 2020).

Por ejemplo. Para hallar la altura de una pirámide de Egipto, Tales de Mileto comparó la sombra de la pirámide con la de una vara vertical de longitud conocida.

El método utilizado por Tales se basó en el principio de analogía, pues antes había resuelto tareas similares y conocía que: la relación entre los dos catetos de un triángulo rectángulo se mantiene en todos los triángulos semejantes a él. Al resolver una tarea el alumno siempre debe preguntarse: ¿Puedes encontrar una tarea análoga y resolverla?

El principio de analogía aplicado por Tales de Mileto para hallar la altura de una pirámide comparando su sombra con la de una vara vertical de longitud conocida, lo emplean los alumnos de noveno grado cuando resuelven tareas como la siguiente: Calcular la altura de un pino, si se conoce que una vara que mide $124cm$ proyecta una sombra de $32cm$ y la sombra del árbol a la misma hora en igual posición es de $258cm$. ¿Cuál es la solución de esta tarea?

En la formación de conceptos el empleo de la analogía ayuda para favorecer en los estudiantes las habilidades con respecto al definir. Se puede definir el seno de un ángulo agudo por género próximo y diferencia específica.

ISBN: 978-959-16-4472-5

Se realiza un análisis de la definición. Sea α un ángulo agudo de vértice A en un triángulo rectángulo ABC (observe figura), sea a y b los catetos y c la hipotenusa, se llama seno de α y se denota **sen**α a la razón $\frac{a}{c}$ entre el cateto opuesto a y la hipotenusa c.

$$\textbf{sen}\ \alpha = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$$

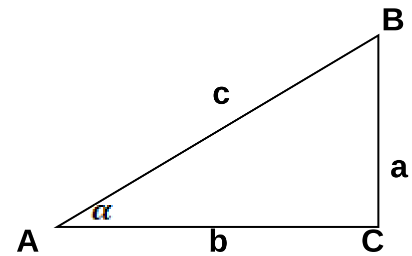

Figura 3.4

En el contenido del concepto seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define a partir del concepto superior razón **(**entre el cateto opuesto y la hipotenusa), las características esenciales se expresan recurriendo a otros conceptos: ángulo agudo, triángulo rectángulo, cateto e hipotenusa, ya conocidos por los alumnos.

Definir el concepto seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo de esta forma, posibilita utilizar la analogía como forma de trabajo para obtener las definiciones de las otras razones trigonométricas de los ángulos agudos en el triángulo rectángulo.

En la obtención de propiedades de operaciones matemáticas es muy útil el empleo de la analogía como principio de búsqueda. Se presenta en el pizarrón un cuadro como el siguiente (hoja de trabajo).

1. Se indica anotar las propiedades de la potencia de exponente racional (columna izquierda). Aplicando la definición de potencia a exponente racional, completar la tabla. Enunciar las propiedades que se obtienen para los radicales.

Propiedades de las potencias	Propiedades de los radicales
1) $a^{\frac{1}{n}} .\ b^{\frac{1}{n}} = (a.b)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt{a.b}$
2) $a^{\frac{1}{n}} :\ b^{\frac{1}{n}} = (a:b)^{\frac{1}{n}}$	
3) $\left[a^{\frac{1}{n}}\right]^{m} = a^{\frac{m}{n}}$	
4) $\left[a^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$	

Monografías 2020
Universidad de Matanzas© 2020
ISBN: 978-959-16-4472-5

5) $a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}}$	

Hacer una revisión de las propiedades que han anotado para insistir en el empleo de la terminología y simbología matemática y las analogías entre las propiedades de las potencias y los radicales.

La analogía es muy útil para descubrir propiedades (ejemplo anterior), pero también para hallar soluciones cuando se reduce un problema a otro ya resuelto.

Ejemplo. En la Geometría existen numerosas analogías cuando se pasa de propiedades y relaciones en el plano a consideraciones en el espacio, por ejemplo:

A_1) Entre todas las figuras planas de igual área, el círculo tiene el mínimo perímetro.

A_2) Entre todos los cuerpos de igual volumen, la esfera tiene la mínima superficie.

B_1) Cada lado de un rectángulo es paralelo e igual a uno de sus otros lados.

B_2) Cada cara de un paralelepípedo rectangular es paralela e igual a una de sus otras caras.

Es importante destacar que, si se pretende enseñar al alumno las formas de trabajo y de pensamiento de la matemática, se deben aprovechar estas situaciones para guiarlo, mediante impulsos, para descubrir la analogía y, de ese modo, lograr que la aplique correcta y conscientemente. Muchas deficiencias y errores se explican por las conclusiones erróneas de la aplicación del principio de analogía**.**

El alumno amplía, por analogía que se aplica inconscientemente por él, las reglas hacia los casos a los cuales la analogía no se aplica y empieza a utilizar esa regla ampliada a la resolución de los problemas y ejercicios.

Por ejemplo, el error de simplificación de los sumandos en el numerador y el denominador de las fracciones. La causa principal de este error es el gran parecido que existe entre la suma y el producto: las formulaciones parecidas de las propiedades conmutativas, asociativas, etc.

Parece también que los alumnos cometen más errores por analogía, por ejemplo:

- sen $(\alpha + \beta)$ = sen α + senβ
- lg (a + b) = lg a + lg b

ISBN: 978-959-16-4472-5

Las conclusiones erróneas por analogía la hacen no solamente alumnos, sino también adultos, la historia de las matemáticas conoce muchos ejemplos de analogías erróneas hechas por especialistas matemáticos.

Así el profesor debe luchar por las deficiencias en las aplicaciones de la analogía por los alumnos, a la resolución de los problemas y ejercicios y lo mejor es prever la posibilidad de aparición de los errores.

El profesor debe explicar a los alumnos de una forma comprensible, cómo se hace la conclusión por analogía, que esta conclusión no garantiza el resultado verdadero, que esta conclusión es simplemente una hipótesis que necesita la comprobación, la demostración de que esta conclusión es verdadera y además que puede suceder que las conclusiones por analogía sean completamente falsas. El profesor debe revelar ante los alumnos las peculiaridades de las conclusiones por analogía.

El otro medio esencial para la lucha contra la aparición de tales errores es el estudio más profundo, multilateral y minucioso de los conceptos matemáticos y proposiciones. Las analogías erróneas ocurren por los conocimientos formalistas no profundos, no precisos y por los hábitos no sólidos. Durante el estudio de los conceptos el profesor debe insistir que los alumnos aprendan bien el contenido del concepto, su volumen.

Durante el estudio de las proposiciones es necesario conseguir que los alumnos asimilen la esencia de la proposición, puedan fundamentarla conscientemente, presenten la esfera de aplicación de la proposición, es decir dónde no se aplica y dónde se aplica, adquieran hábitos considerables en la aplicación de proposiciones a la resolución de los problemas y los ejercicios.

Tal estudio de los conceptos y las proposiciones es un método profiláctico contra las conclusiones erróneas por analogías. El razonamiento por analogía posee aplicación en diferentes esferas de la sociedad.

Ejemplo 1. En un razonamiento clínico, por ejemplo, al analizar datos morfológicos de una paciente, partiendo de su edad y de las características observables de la lesión de mama que presenta, un médico experto puede generar como conclusión que le aqueja una lesión neoplásica maligna (por analogía con casos anteriores comprobados). Esta hipótesis, desde luego, debe verificarse después mediante otros métodos de análisis más exhaustivos, hasta generar un diagnóstico seguro.

Ejemplo 2. La tabla periódica de los elementos químicos de Mendeléyev (1834-1907), es otro caso ilustrativo, pues puso de relieve cómo la intuición de un sabio puede adelantar mediante razonamientos verosímiles, conclusiones cuya validez se verifica mucho tiempo después de haber sido planteadas. Inicialmente la tabla semejaba un edificio con muchas habitaciones vacías. Elementos con las propiedades que predijo Mendeléyev han sido hallados ulteriormente, como es el caso del renio, descubierto en 1925, por lo que para

ISBN: 978-959-16-4472-5

ocupar su lugar en la tabla periódica tuvo que esperar más de medio siglo después de la revelación de la ley periódica de los elementos químicos. En fecha más reciente la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (LUPAP, por sus siglas en inglés) reconoció que científicos del instituto japonés Riken descubrieron el elemento 113 de la tabla periódica de Mendeléyev, denominado japonio (Prensa Latina, 2016).

Es conveniente señalar que aprender a utilizar los procedimientos heurísticos en la asignatura Matemática está declarado en los objetivos de los diferentes niveles educativos. Además de declararse explícitamente en las ideas claras del enfoque metodológico general de la asignatura Matemática.

Se aspira a propiciar la reflexión, el análisis de los significados y formas de representación de los contenidos, el establecimiento de sus relaciones mutuas, la valoración de qué métodos de resolución son adecuados y la búsqueda de los mejores, dando posibilidades para que los alumnos elaboren y expliquen sus propios procedimientos (Álvarez, 2014).

Para lograr esta aspiración ya en primaria aprenden a buscar informaciones a partir de diversas fuentes, incluyendo las electrónicas. Bajo la guía del maestro aprenden a utilizar el programa heurístico general y las técnicas para la búsqueda de vías y medios matemáticos para la resolución de problemas, y obtienen, seleccionan y utilizan procedimientos algorítmicos. Además, asimilan ciertos recursos para saber qué y cómo estudiar y para controlar sus procesos de aprendizaje.

A medida que transcurren los grados utilizan otras ayudas y herramientas sin necesidad de que les sea sugerido, como los medios auxiliares heurísticos que apoyan el razonamiento. Son capaces de utilizar conscientemente procedimientos heurísticos y de modificar y crear procedimientos algorítmicos. Al mismo tiempo refinan sus estrategias de aprendizaje, apoyadas en el conocimiento que poseen sobre sí mismos y las metas que deben alcanzar. Por ejemplo, para lograr la racionalización del trabajo mental los alumnos deben constantemente verificar si el proceso real de solución coincide con el plan de solución desarrollado durante el análisis. Por lo tanto, a la actividad racional pertenecen también las acciones para el control del proceso de solución. Para esto no basta controlar el resultado final, es necesario controlar todo el proceso de solución para evitar arrastrar un error de principio a fin del trabajo en la solución.

Se requiere que el profesor ofrezca mediante preguntas estímulos a sus alumnos para el empleo del principio heurístico de analogía:

- Observen el proceder empleado en el ejercicio tratado ayer. Puede ser utilizado en este caso.
- ¿Qué ejercicios semejantes se han resuelto con anterioridad?
- ¿Cómo se ha trabajado en casos similares?
- ¿Conocen algún problema que se relacione con este?

- Piensa en problemas similares o equivalentes con el dado.
- Piensen en cualquier problema que sea semejante con este por su forma (los datos, las condiciones)
- Piensen cómo se procedió en el caso de la………..
- Recuerden la demostración del teorema……, se podrá proceder de manera similar. ¿Por qué?

Conclusiones

En el proceso pedagógico el papel de la analogía es doble; como un factor heurístico efectivo para la búsqueda de nuevos conocimientos y vías para la solución de diferentes problemas, por otra parte su utilización incorrecta hace al alumno sacar conclusiones falsas que no se comprueban, ni se fundamentan. El profesor debe instruir con impulsos adecuados y análisis reflexivo de lo realizado cómo emplear el principio de analogía conscientemente.

Para favorecer la actividad creadora de los estudiantes en la asignatura Matemática, los métodos implementados en su enseñanza, deben ser portadores de las formas de trabajo y de pensamiento fundamentales de la ciencia matemática, pues posibilitan encontrar nuevos conocimientos y desarrollar habilidades y hábitos intelectuales que requiere toda actividad matemática.

La preparación de los alumnos para el trabajo racional, crea condiciones para el desarrollo de la actividad creadora y exige que, en las clases de matemática, apliquen conscientemente, tanto los medios necesarios para la racionalización, como los procedimientos del trabajo mental para la solución de problemas matemáticos. La analogía proporciona una forma inductiva de argumentar y afirma que si dos o más entidades son semejantes en uno o más aspectos, entonces lo más probable es que también existan entre ellos más semejanzas.

Referencias bibliográficas

ALMEIDA, B. Y VALDIVIA, M. *La heurística en la matemática: un recurso para aprender a pensar*. En: Curso pre-evento FIMAT. Holguín: Universidad Pedagógica "Rafael María de Mendive", 2009.

ÁLVAREZ, M. et al. 2014. *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos.* La Habana: Pueblo y Educación, 2014.

BALLESTER, S. et al. 2001. *Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. (primera reimpresión)).* La Habana: Pueblo y Educación, 2001.

BALLESTER, S. et al. 2018. *Didáctica de la Matemática (Tomo I).* La Habana. Ed. Félix Varela, 2018.

MÜLLER, H. *El trabajo heurístico y la ejercitación en la Enseñanza de la Matemática en la Enseñanza General Politécnica y Laboral (Folleto, parte III).* Santiago de Cuba: Instituto Superior Pedagógico "Frank País García", s/f.

POLYA, G. 1966. *Matemática y Razonamiento Plausible.* Madrid: Tecnos. S.A., 1966.

PRENSA LATINA, AGENCIA INFORMATIVA LATINOAMERICANA S.A. 2016. “Tabla periódica de Mendeléyev. Hallan elemento 113”. *Semanario Orbe.* Semana del 9 al 15 de enero de 2016, Vol. Año XVII, 32, pág. 9.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. 2020. *Diccionario de la lengua española (versión electrónica).* España: Vigésimo tercera edición/Tricentenario, 2020.

VILLEGAS, E. 2020. *Los procedimientos de solución en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática* (Capítulo 1). La Habana: Manuscrito no publicado, 2020.

WIKIPEDIA. 2013. *Analogía.* [Fundación Wikimedia] s.l.: Wikipedia 2013, Enciclopedia en línea, 2013. http://www.wikipedia.org/.