SISTEMA DE ACCIONES DIRIGIDAS A ELEVAR LA PREPARACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN PRIMARIA EN LA GEOMETRÍA EN LOS MOVIMIENTOS DEL PLANO

MSc. Jorge Luis Sotolongo Echevarria[1]

1 *Universidad de Matanzas – Centro Universitario Municipal de Jagüey Grande, Calle 54 #904 e/ 9 y 11 Jagüey Grande, Matanzas.*

Resumen

La investigación aborda uno de los problemas con mayor dificultad en el estudio de la matemática, en particular en la rama de la geometría los movimientos en el plano pues los del diagnóstico realizado en los grupos de licenciatura en educación primaria se pudo determinar una serie de debilidades por lo que se traza como objetivo: Elaborar acciones dirigidas a incentivar el interés por el estudio de la geometría, para elevar la preparación de los estudiantes de modo que puedan desarrollar con éxito el curso de Geometría para ello se trabaja: Papel que juega el lenguaje en la concepción de las matemáticas. Tratamiento de la línea directriz geometría en la enseñanza. Los procedimientos heurísticos en la enseñanza de la matemática. Metodología a seguir para elaborar la propuesta de actividades historia de la geometría. Diagnóstico del estado actual y acciones para la profundización de conocimientos geométricos y el sistema de actividades.

***Palabras claves**: Geometría, Movimiento, Plano.*

Introducción

La Enseñanza de la Matemática posee una larga historia, desde tiempos remotos se le

ISBN: 978-959-16-4317-9

considera como una asignatura necesaria para la preparación de las nuevas generaciones, básicamente para contribuir al desarrollo del pensamiento. Así es como Platón exigía el conocimiento de la Geometría como requisito para ingresar en la Academia, no porque fueran a utilizar los conocimientos geométricos, sino porque consideraba que la geometría era indispensable para la formación del pensamiento de un filósofo.

En el mismo sentido, algunos historiadores han señalado que los Elementos de Euclides estaban destinados a servir de texto en la preparación de filósofos y que esa es la razón por la cual su organización destaca básicamente la estructura deductiva de la Geometría; según estos autores la elaboración durante cientos de años de manuales escolares al estilo de los Elementos constituye un error no sólo pedagógico sino histórico.

Esta situación se mantuvo cuando las disciplinas matemáticas formaron parte de las siete artes liberales en la época medieval y continúa en la escuela moderna en la que entre los objetivos de la Matemática aparece en primer lugar el desarrollo del pensamiento lógico.

El hombre se ha formado y lo hará en el futuro sobre la base del avance y florecimiento de la ciencia y la técnica, al cambiar las condiciones materiales, el ser humano se transforma así mismo, teniendo en cuenta que las posibilidades de su desarrollo social son inagotables.

Las nuevas tecnologías con sus grandes posibilidades originan la demanda de un hombre talentoso con variadas capacidades intelectuales. Al incrementarse en el futuro, las condiciones de producción automatizadas, el hombre como sujeto del trabajo debe ampliar su repertorio de cualidades, tales como: tener conocimientos profundos y universales, hábitos, habilidades y capacidades variadas, poseer un alto nivel cultural, una actitud consciente hacia el trabajo, entre otros por lo que es necesario de un desarrollo de las matemáticas.

El problema del aprendizaje de la matemática tal vez es uno de los mayores retos para la didáctica, los factores que inciden en el problema son múltiples y de ahí yace su complejidad. El aprendizaje de la asignatura Matemática ofrece múltiples posibilidades para contribuir de manera decisiva al desarrollo multilateral del educando. Esta asignatura en la escuela al igual que la propia ciencia matemática tiene sus propias complejidades, lo cual representa para un grupo de estudiantes una barrera.

Existen varios argumentos que muestran la significación del estudio de las matemáticas. Indudablemente, las matemáticas son uno de los pilares en la formación científica de los estudiantes; ayuda a la interpretación de modelos, la representación de proposiciones de otras ciencias y la resolución de problemas cotidianos, escolares y científicos, ayudan al desarrollo del pensamiento lógico, algorítmico, general, espacial, analítico, práctico y creativo, entre muchos otros, se pueden enseñar principios, actitudes y valores que potencien el individuo al servicio de su país, Es imposible el estudio de la ciencia, la tecnología y el mercadeo sin las matemáticas; estas están en la base de los procesos

ISBN: 978-959-16-4317-9

operativos fuertes que permiten la toma de decisiones en diversos campos.

Uno de los contenidos dentro de la matemática con mayores dificultades es la geometría por lo que se debe garantizar una adecuada preparación en la línea directriz geometría, teniendo en cuenta las dificultades determinadas en las carreras de licenciatura en primaria al recibir los contenidos de geometría y los resultados en los exámenes finales de la asignatura con respeto a estos contenidos así como los contenidos de representación de superficies en un sistema de coordenadas para poder determinar los límites de integración de una integrar triple en cálculo para las carreras agronomía y contabilidad en nuestra cede.

El problema alcanza su mayor expresión que son contenidos que fueron tratados en los programas recibidos, además son insuficientes las habilidades pues no conocen como surge estos y la aplicación en la práctica de los mismos. Los argumentos anteriormente planteados permiten plantear como objetivo: Elaborar acciones dirigidas a incentivar el interés por el estudio de la Geometría, elevar la preparación de los estudiantes de modo que puedan desarrollar con éxito el curso de Geometría.

Desarrollo

1.1- Papel que juega el lenguaje en la concepción de las matemáticas

El desarrollo de las matemáticas va ligado al desarrollo del lenguaje y del pensamiento, el profesor de matemáticas recurre a modelos matemáticos puros para resolver problemas, intramatemáticos o extramatemáticos; el lenguaje es una poderosa herramienta que ayuda a la comprensión de las matemáticas y del lenguaje matemático. Expresiones como sumar raíces, hallar el límite, demostrar una identidad, resolver una ecuación bicuadrada, derivar una función, entre muchas otras, necesitan de un trabajo lingüístico además de matemático.

Entre las múltiples funciones que tiene el lenguaje, es necesario resaltar la función cognitiva; aquí el lenguaje ayuda a la comprensión y a la argumentación en el campo matemático.

El lenguaje es soporte del pensamiento lógico e infra lógico. Todo conocimiento matemático se construye mediante el lenguaje, imposible sin él. En su carácter abstracto es necesario que el lenguaje inyecte las palabras con su significación matemática para que se dé el pensamiento necesario en la abstracción del concepto.

La lógica ordena los procesos mentales para producir los resultados necesarios, entonces el lenguaje cumple una función fática al mantener la relación entre el hombre y su pensamiento, acentúa el contacto y mantiene vigente el canal del discurso silente.

La exposición en matemáticas es más efectiva cuando quien expone tiene dominio de la lengua y de los conocimientos necesarios para expresar de buena forma el discurso

ISBN: 978-959-16-4317-9

matemático.

También por la condición didáctica de la clase, es permitido utilizar alteraciones, digresiones, metáforas y analogías que permitan una mejor comprensión de las matemáticas.

Las figuras geométricas y las múltiples gráficas que se trazan en un plano obedecen a factores matemáticos condicionados por el lenguaje y su categoría semántica; por eso establecemos movimientos rectos o curvos, suaves o angulosos, continuos o discontinuos.

La observación de los objetos matemáticos y de los objetos de la realidad, el paso del tiempo, perfeccionan el concepto de matemáticas; las múltiples herramientas de la modernidad dinamizan el concepto, y esto debe ser utilizado por quien quiere dedicarse a la enseñanza de las matemáticas.

La matemática, ciencia por excelencia, nos ayuda a ver mejor lo que pasa cerca y lejos, incluso nos permite predecir lo que no ha pasado y ver lo que no puede ser visto por aquellas mentes que se dejan repeler por el estudio de la ciencia.

Ahora, ¿cuál es el concepto de matemáticas que debe permanecer? Difícil decidirlo en pocos renglones. Confiamos en las matemáticas como la herramienta que sirve a unos y la ciencia que concentra a otros, pero sabemos que es herramienta gracias a que antes fue ciencia; es decir, el científico matemático investiga un modelo, un concepto, un procedimiento, que luego será utilizado por otra persona, como herramienta para conseguir otro fin. Pueden entonces pensarse las matemáticas como la herramienta que ayuda a resolver problemas, y basarnos en el método de la resolución de problemas, en el momento de enseñarlas.

O podemos pensar las matemáticas como la ciencia que se encarga del estudio de números, figuras geométricas, y relaciones, propiedades y operaciones entre unos y otros, como es pensada en la mayoría de las escuelas.

No obstante, en este trabajo didáctico, se defiende y se pone en consideración una definición de matemáticas que permite proponer metodologías alternativas de trabajo. La definición es: las matemáticas son un conjunto de verdades que surgen de la relación dialéctica del hombre con el medio, expresadas en conceptos proposiciones y leyes.

1.2- Tratamiento de la línea directriz geometría en la enseñanza

La enseñanza de la Geometría tiene amplias posibilidades de contribuir al desarrollo del pensamiento del individuo siendo los maestros los encargados de iniciar el desarrollo del pensamiento geométrico desde edades tempranas, de lograr que los niños puedan hacer una mejor interpretación del mundo físico en que viven, y a su vez contribuir a desarrollar, en

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

ellos, el pensamiento lógico - deductivo.

La Línea Directriz “Geometría y trabajo con magnitudes” se desarrolla desde la enseñanza primaria, transitando por los tres grados de la Secundaria Básica hasta la enseñanza Preuniversitaria, en forma permanente pues las ideas geométricas deben siempre presentes; el significado geométrico de los conceptos y teoremas deben ocupar un plano principal siempre que sea posible, ya que contribuye de manera esencial a lograr una representación mental clara de los conceptos, los que serán elaborados cuidadosamente y con la participación activa de los alumnos. Por tal razón el vínculo con las restantes áreas matemáticas debe explicitarse en función de la comprensión de conocimientos aritméticos y algebraicos.

La geometría debe ser empleada como vehículo apropiado para interpretar el mundo físico y como herramienta la orientación en el espacio. (Programa Director Matemática, pp. 13 – 14, 1999).

La Línea Geometría está sustentada sobre tres de los aspectos esenciales para el estudio de esta ciencia: las relaciones de posición entre rectas, entre rectas y figuras, las transformaciones geométricas (los movimientos del plano), las relaciones de igualdad y semejanzas de figuras.

Objetivos de la Línea Directriz**:**

• Identificar figuras y cuerpos geométricos

• Reconocer las propiedades fundamentales de las figuras y cuerpos geométricos

• Esbozar figuras y cuerpos geométricos

• Estimar y calcular magnitudes

• Resolver problema relacionados con:

- las propiedades de las figuras planas (7mo. grado),
- las propiedades de las figuras planas y las proporciones (8vo. grado), y
- las propiedades de figuras planas y cuerpos geométricos (9no. grado).

. Estructuración del curso de geometría en la escuela primaria

Para la concepción metodológica del curso de geometría en la escuela primaria se ha partido de los conocimientos que los niños tienen sobre serie de figuras y cuerpos geométricos, cuyas formas son muy comunes a los objetos del medio con los cuales ellos se

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9
1972 UNIVERSIDAD DE MATANZAS

relacionan.

De esta manera se van obteniendo paulatinamente sus propiedades de forma intuitivaoperativa, en la medida que se van estudiando los conceptos punto, recta, segmento, ángulo y las relaciones entre ellos (igualdad, se cortan, paralelismo, perpendicularidad, etc.…) se va ampliando gradualmente el número de figuras presentado inicialmente y al final de cuarto grado se completa y se sistematiza el concepto de figuras y cuerpos considerado como básico.

Panorámica de los contenidos de geometría en la escuela primaria.

Primer Grado. Se trabaja: orientación en el espacio y en la hoja de trabajo, punto, línea, línea recta y recta. Segmentos. Triángulos, rectángulos, cuadrados y Círculo.

Segundo grado Relación de posición entre puntos y entre puntos y rectas. Triángulos. Rectángulos y cuadrados. Ortoedro y cubo. Círculo y esfera.

Tercer grado**.** Relación de posición entre puntos y rectas . Relación de posición entre rectas. Paralelogramos (rectángulos y cuadrados) Concepto intuitivo de movimiento. Prisma (ortoedro y cubo.) Circunferencia, círculo y cilindro.

Cuarto grado. Rectas semirrecta y segmento. Plano, semiplano y ángulos. Polígonos y cuerpo de caras planas. Repaso del concepto intuitivo de movimiento. Figuras simétricas. Figuras y cuerpos redondos.

1.3 Los procedimientos *heurísticos en la enseñanza de la matemática*

Para aprender el sujeto realiza múltiples acciones externas, imitando o reproduciendo la actividad del adulto en un proceso de colaboración con el mismo, poco a poco estas acciones van siendo asimiladas o interiorizadas por el sujeto, convirtiéndose en acciones internas que le permite orientar su conducta, estableciéndose así una relación dialéctica entre lo externo y lo interno. El paso al interior de las acciones externas se denomina proceso de interiorización.

La metodología de la enseñanza se fundamenta en tres principios:

1. Principio de la individualización. Significa adaptar los métodos de enseñanza a las características individuales de cada alumno. Algunos aspectos básicos de este principio son:

a) Supone la capacidad cognoscitiva de los alumnos (conocimientos previos pertinentes).

b) Es conveniente distinguir en los objetivos y contenidos de aprendizaje los aspectos básicos y fundamentales, que por lo mismo han de ser comunes para todos los

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

alumnos, de los aspectos individuales propios de cada alumno.

c) Diagnóstico de las necesidades y potencialidades de cada alumno.

2. Principio de globalización: El aprendizaje significativo siempre es globalizado, en la medida en que supone que el nuevo material de aprendizaje se relaciona de forma sustancial y no arbitraria con lo que el alumno ya sabe.

3. Concepción de ayuda pedagógica: Ayuda en la organización del contenido de aprendizaje, en los estímulos a su motivación.

Bernardo, J plantea que los elementos necesarios para un aprendizaje eficaz son: que se pueda aprender, que se quiera aprender y que se sepa aprender.

Las estrategias pueden diferenciarse en métodos, técnicas, habilidades y destrezas para aprender "Un procedimiento (llamado también a menudo regla, técnica, método, destreza o habilidad) es un conjunto de acciones ordenadas y finalizadas, es decir, dirigidas a la consecución de una meta" (1) Los rasgos de todo procedimiento son:

- Se requiere de una actuación.
- No es una actuación cualquiera, sino ordenada.
- Esta actuación se orienta hacia la consecución de un fin.

Los procedimientos o estrategias constituyen el saber hacer, el saber actuar eficazmente. Existen tres grandes clasificaciones: Procedimiento general, el específico y el subsidiario, aunque existe otra clasificación: Los cerrados o algorítmicos y los abiertos o heurísticos.

Una forma simplificada de concebir al individuo frente a una situación-problema de aprendizaje se logra suponiendo que él interactúa con su medio a través de tres conjuntos de variables: (a) las afectivas, (b) las cognitivas, y, (c) las estratégicas.

Para lograr el nivel que se exige en las habilidades y capacidades matemáticas se requiere la selección de métodos y procedimientos que propicien un nivel de asimilación productivo y la adecuada dirección de la actividad de los estudiantes en la adquisición de los conocimientos que deben asimilar y las acciones y operaciones que han de realizar.

Es también importante que las clases de Matemática propicien la formación de intereses cognoscitivos por la asignatura. Esto se alcanza, en gran medida, cuando el alumno aplica sus conocimientos y habilidades y llega por sí a la solución de ejercicios y problemas, pues así sentirán mayor satisfacción por la tarea realizada.

Una vía para lograr este propósito lo constituye el trabajo heurístico de los estudiantes, lo que requiere de la preparación pedagógica adecuada de los profesores para dirigirlo,

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

aspecto clave a considerar en el trabajo de perfeccionamiento que se desarrolla en todos los niveles de enseñanza.

Empleando la enseñanza heurística en la clase de Matemática, se contribuye a lograr:

- La independencia cognoscitiva de los escolares.
- La integración de los nuevos conocimientos que asimilan los alumnos, con los ya existentes.
- El desarrollo de operaciones intelectuales tales como: analizar, sintetizar, comparar, clasificar, etc., y de las formas de trabajo y de pensamiento fundamentales de la ciencia matemática: variación de condiciones, búsqueda de relaciones y dependencias y consideraciones de analogía.
- La formación de capacidades mentales, tales como: la intuición, la productividad, la originalidad de las soluciones, la creatividad, etc.

Consideramos conveniente aclarar que la enseñanza heurística no debe asociarse únicamente al trabajo en elaboración conjunta, esta puede ser utilizada tanto en la actividad independiente del alumno como en la exposición de los conocimientos por parte del profesor. Un nuevo contenido puede presentarse como un problema y, mediante la formulación de preguntas - cuyo objetivo es estimular el pensamiento y conducir al razonamiento - mostrar la vía a seguir para su solución, en forma expositiva.

Los autores consultados clasifican los elementos heurísticos en dos categorías: procedimientos heurísticos y medios auxiliares heurísticos.

Los medios auxiliares heurísticos constituyen recursos materializados de búsqueda que contribuyen a descubrir lo nuevo, mediante la búsqueda de relaciones y dependencias entre lo dado y lo buscado, variar condiciones (hacer móvil determinados elementos) para establecer objetivamente determinadas analogías entre los objetos, procesos y operaciones. Estos medios pueden ser:

- Las figuras ilustrativas, esbozos o figuras de análisis
- Las tablas (para reflejar las relaciones entre datos)
- Los compendios y mementos (que contienen las definiciones de los conceptos fundamentales, los teoremas más necesarios, etc.)

Los procedimientos heurísticos constituyen recursos mentales de búsqueda que permiten orientarse y obtener la vía de solución durante el proceso de resolución de un problema matemático, ellos apoyan la realización consciente de actividades mentales complejas y

ISBN: 978-959-16-4317-9

exigentes por lo que realmente su alcance pasa los límites de la Matemática.

Un primer estudio de estos procedimientos en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, la ofrecen (Jungk, 1981) y (Zillmer, 1981), al diferenciarlos en principios, reglas y estrategias heurísticas.

Más tarde, como una profundización del estudio de los procedimientos heurísticos, el Dr. Horst Müller los distingue además entre procedimientos heurísticos generales y especiales atendiendo a su aplicación en la búsqueda de la idea de solución a variados tipos de problemas o a un tipo específico de problema.

Los principios heurísticos. Son de gran utilidad para la búsqueda de nuevos conocimientos y para su fundamentación, también sugieren ideas para la solución de diferentes problemas. Dentro de los principios heurísticos generales se destacan la analogía, la reducción y la inducción. Analicemos uno de ellos:

Principio de analogía. Este principio consiste en la utilización de semejanzas de contenido o forma.

George Polya, destacado matemático y profesor de Matemática húngaro, en su libro: "Matemática y razonamiento plausible" expresa: "*Analogía es una especie de semejanza. Es, diríamos semejanza sobre un nivel definido y conceptual. La diferencia esencial entre analogía y otras clases de semejanza yace, en las intenciones del pensador. Objetos semejantes son aquellos que concuerdan entre sí en algún aspecto. Si usted trata de delimitar el aspecto en que concuerdan usted mira estos objetos semejantes como análogos.*" Y añade: ... "*Dos sistemas son análogos si concuerdan en relaciones claramente definibles de sus partes respectivas*."

La analogía, como un factor heurístico positivo, puede ayudar en tres direcciones:

1. Puede aplicarse para que los alumnos descubran una proposición nueva para ellos, y la formulen;

2. Puede sugerir el método y el procedimiento para la demostración de una proposición nueva;

3. Puede sugerir la vía para la resolución de un problema, de un ejercicio.

Otra de las formas de utilización de la analogía consiste en buscar prototipos de ejercicios ya conocidos, determinar los aspectos comunes y las diferencias entre los prototipos y el ejercicio planteado, y tratar de resolver este utilizando los aspectos comunes y variando la vía de solución de acuerdo con las diferencias encontradas.

En estos dos casos se aprecia una de las formas de utilización de la analogía: se demuestran algunos casos especiales y se trata de generalizar la vía de solución utilizando las analogías

ISBN: 978-959-16-4317-9

encontradas.
En estos casos se aprecia otra de las formas de utilización de la analogía, que consiste en buscar prototipos de ejercicios ya conocidos, determinar los aspectos comunes y las diferencias entre los prototipos y el ejercicio planteado, y tratar de resolver este utilizando los aspectos comunes y variando la vía de solución de acuerdo con las diferencias encontradas.

Es importante destacar que, si se pretende enseñar al estudiante las formas de trabajo y de pensamiento de la Matemática, se deben aprovechar estas situaciones para guiar al alumno, mediante impulsos, a descubrir la analogía y, de ese modo, lograr que la aplique conscientemente.

1.4 Metodología a seguir para elaborar la propuesta de actividades

La elaboración de un sistema de actividades educativas demanda la toma de posición con el enfoque de sistema como método teórico general, debido a que proporciona la orientación para el estudio de los fenómenos como una realidad integral, formada por componentes que cumplen determinadas funciones y mantienen formas estables de interacción entre ellos.

Todo sistema presenta leyes de totalidad y no constituye un conglomerado de elementos yuxtapuestos mecánicamente, sino que presentan leyes o cualidades generales inherentes a ese conjunto, los que se diferencian de las características individuales de cada uno de los componentes que lo integran. La interacción de cada uno de sus componentes es lo que genera sus cualidades integrativas generales.

El término “sistema” está estrechamente vinculado a cuestiones puramente filosóficas, como la teoría general de sistemas o el enfoque sistémico, este último componente importante de la dialéctica materialista. Para analizarlo se deben tener en cuenta categorías filosóficas que se le relacionan estrechamente, como:

- ✓ Lo general: agrupa los rasgos generales que se manifiestan, sin excepción, en todos los objetos de una clase.

- ✓ Lo particular: integra los rasgos propios y específicos de algunos de los objetos de una clase determinada.

- ✓ Lo singular: determina los rasgos particulares de un objeto, que hacen que sea único e irrepetible y permiten agruparlos en determinadas clases.

Estas categorías filosóficas expresan las conexiones objetivas del mundo, así como las etapas de su conocimiento. Se relacionan con lo relativo al sistema, pues expresan las relaciones entre el todo y la parte, lo complejo y lo simple, así como el análisis y la síntesis, aspectos que deben ser tenidos en cuenta siempre por los investigadores.

ISBN: 978-959-16-4317-9

Todo sistema, para ser considerado como tal, debe cumplir con las siguientes cualidades:

La composición: está integrado por un conjunto de elementos principales que conforman un todo y cuya interacción caracteriza el sistema.

- La estructura u organización interna: los elementos que lo integran tienen una estructura y un funcionamiento particulares, de carácter estable y flexible, determinado por las relaciones entre ellos.

- Principio de jerarquía: está dado por los elementos que pueden ser considerados como subsistemas, donde los inferiores sirven de base a los superiores y estos a su vez subordinan y condicionan a los superiores.

- Las relaciones funcionales: las relaciones de coordinación y subordinación entre sus componentes, las que deben expresarse de modo tal que evidencien su novedad y lo cualitativamente superior que contienen, como cualidad inherente al sistema.

- Las relaciones con el medio: sus elementos deben mantener estrechos vínculos con el medio en el cual se desarrolla, aplica o introduce el sistema.

Existen diferentes acepciones sobre el concepto de sistema, entre los que se señala como un conjunto de elementos relacionados entre sí que constituyen una determinada formación íntegra.

LE Martínez González define como sistema: “Conjunto de actividades relacionadas entre sí de forma tal que integran una unidad, el cual contribuye al logro de un objetivo general como solución a un problema científico previamente determinado.

El autor asume el criterio dado por el autor citado anterior ya que las actividades diseñadas en la siguiente investigación, tienen como elemento en común, su estructura en interrelación, encaminadas a obtener un fin determinado

1.5 Historia de la geometría.

OBJETO DE ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA

La Geometría tuvo su origen en la realidad objetiva, su objeto de estudio en un inicio fue fundamentalmente la medición de terrenos y fueron los geómetras de la Antigua Grecia quienes iniciaron su estudio como ciencia pura, despojándola de su finalidad puramente práctica y utilitaria.

La Geometría que se estudia en nuestra enseñanza en casi su totalidad es la euclidiana, la que considera al transcendental V postulado del gran geómetra griego Euclides, que trata sobre las rectas paralelas. Esta Geometría es conocida como Geometría Elemental y la misma se divide en *Geometría Plana o Planimetría* y en Geometría *del Espacio o*

CD Monografías 2019

ISBN: 978-959-16-4317-9

Estereometría, La Planimetría estudia las figuras que tienen todos sus puntos y elementos en un mismo plano y la Estereometría, en planos diferentes.

La historia de la Matemática está vinculada estrechamente con la historia de la actividad productiva humana, del pensamiento y el lenguaje.

Los descubrimientos de documentos y hallazgos arqueológicos dan fe de los conocimientos geométricos de aquella época y la existencia de artículos ornamentales geométricos. El más célebre de los documentos hallados es el llamado “Papiro *de Rhind* “, cuyo manuscrito se encuentra en el Museo Británico. Este documento que lleva el curioso título de “Orientaciones para conocer todas las cosas curiosas”, fue descubierto por el antiguo escocés Henry Rhind en 1858 y se dice que se trata de una copia realizada por el sacerdote Ahmés en el siglo XVII a.n.e. En este documento se hace referencia a figuras geométricas y fórmulas para tomar mediciones.

Una antigua opinión transmitida por el historiador Herodoto (484-425) atribuye el origen de la Geometría a la necesidad de medir los terrenos después de las inundaciones periódicas del río Nilo, en Egipto.

Ciertamente, en el milenio VI a.n.e. comenzó en algunas regiones geográficas la sustitución de la economía basada en la caza y la recolección, por la agricultura y la ganadería (primera división social del trabajo), con lo cual se produjo una decisiva transformación en la relación de los hombres entre sí. Esta transformación se designó como Revolución Agraria y condujo a la erradicación de la comunidad primitiva y al surgimiento de una sociedad dividida en clases, basada en la producción agrícola.

La producción agraria propició la necesidad de orientarse en tiempo y espacio, siendo necesario determinar las magnitudes de los campos de cultivo, realizar cálculos para la construcción de canales de irrigación, etc. Esto condujo, evidentemente, al dominio de las operaciones aritméticas y de problemas geométricos.

Sin embargo, es probable que la necesidad de fijar los conocimientos geométricos que se encuentran en los papiros egipcios haya surgido, además, de otras actividades humanas: *construcción* y *astrología*. Por ejemplo, para levantar las famosas pirámides de Egipto, los arquitectos tuvieron que conocer la forma de escuadrar los bloques de piedra, cómo manejarlos y situarlos en posición correcta. Los primeros planos de una construcción se diseñaron sobre arcilla, a modo de simples diagramas que mostraban la forma del edificio terminado.

Gracias a estas construcciones se realizaron grandes descubrimientos en cuanto el arte de medir y se considera que en estas construcciones emplearon la plomada y la escuadra como lo hacen aún nuestros albañiles.

El uso de la escuadra por los egipcios supone que antes aprendieron a formar un triángulo

CD Monografías 2019

ISBN: 978-959-16-4317-9

rectángulo, jamás se sabrá quien fue su descubridor, aunque se supone que fueron los hombres que se dedicaban a preparar las cuerdas anudadas a intervalos regulares, utilizados para medirl*os* antiguos egipcios trazaban sus circunferencias haciendo girar una cuerda tensada alrededor de un eje. Sabían que el tamaño de un círculo depende de la longitud de la cuerda, y por consiguiente que su área está en relación con la distancia que media entre el centro y la circunferencia, distancia a la que después se le llamó radio.

A unas mil millas hacia el este del río Nilo, en una tierra llamada Mesopotamia, se desarrolló una civilización tan antigua como la egipcia, la que los historiadores distinguen con los nombres: sumeria, caldea, aseria y babilónica, de acuerdo con la época. La Matemática mesopotámica se encontraba a un nivel notablemente superior a la egipcia, dado en primer lugar por las exigencias sociales. Típico de Mesopotamia era un extenso sistema de irrigación artificial, por consiguiente, los problemas relacionados con el control de las aguas, tales como la construcción de los canales, diques, medición de terrenos, ocupaban una parte notable de los textos matemáticos. Además, Mesopotamia a diferencia del antiguo Egipto, estaba obligada a mantener un extenso comercio con el exterior, lo que influyó en el desarrollo de sus conocimientos matemáticos.

Hace 6 000 años tuvo lugar en Mesopotamia uno de los más grandes inventos: *el de la rueda*. Se supone que, en Mesopotamia, tras este descubrimiento, se adelantara mucho más en el estudio del círculo que los egipcios, sin embargo, no fueron así. Los egipcios estimaron la longitud de la circunferencia como 3,14 veces la longitud de su diámetro, mientras en Mesopotamia se le daba un valor de 3, mucho más cómodo, si se quiere, pero más impreciso.

No se sabe con exactitud cómo pudieron aquellos hombres calcular el valor aproximado de □. Sin embargo, algunas inscripciones dan la clave para suponer que lo hicieron dibujando un cuadrado por la parte interior de una circunferencia y otro por la parte exterior de forma que ambos quedan en contacto con ella y llegaron a pensar que la longitud de la circunferencia en cuestión tenía un valor semejante a la mitad de la suma del perímetro de cada cuadrado.

Pero, si por una parte los sacerdotes de Mesopotamia no alcanzaron en cuanto al círculo tantos conocimientos como los egipcios, por otra su dominio en la geometría práctica no tenía nada que envidiar de los egipcios. Por ejemplo: la relación expresada en el teorema de Thales de Mileto, así como el contenido del teorema de Pitágoras de Samos fueron aplicadas en la práctica en la matemática mesopotámica mucho antes que fueran enunciados y demostrados por Thales y Pitágoras.

En el período comprendido entre mediados del milenio II a.n.e. hasta el siglo VIII y VII a.n.e. se produjeron en Grecia amplias transformaciones económicas, políticas y sociales lográndose una producción superior, lo que condujo a que las mercancías se convirtieran en objeto comercial en gran escala y a través de esta actividad los griegos fueron apropiándose

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

de los conocimientos de los otros pueblos.

En el siglo XII (comienzo del Renacimiento) algunos monasterios formaron escuelas y entre los estudios científicos que se realizan, la Geometría recibió una atención especial, en esta época se tradujo en 1120 la obra “Elementos” por el monje inglés Atelbardo de Bath. Una vez que la Geometría entró en las Universidades, pronto se reconoció que formaba parte indispensable de la educación y se enseñaba en todas las escuelas, pero hasta los tiempos modernos no se obtuvo ningún progreso como ciencia. El mayor de ellos fue la aplicación y el uso de la Geometría a las Artes y Oficios y a la Ingeniería. El único texto de Geometría que se usaba en Inglaterra hasta hace muy poco fue los “Elementos” de Euclides.

El Renacimiento marcó un momento de despegue, fue en la primera mitad del siglo XV que, desplazando a la Edad Media, en el panorama europeo emerge un período de grandes transformaciones y descubrimientos. La revolución científica del siglo XVII destruyó la imagen medieval de la ciencia y propició el desarrollo de la Geometría.

Movimientos del plano

Por transformaciones del plano se consideran todas las aplicaciones biyectivas del plano □ en sí mismo, es decir, correspondencias biunívocas de □ sobre □. Las transformaciones del plano se pueden agrupar atendiendo a si conservan o no las distancias entre dos puntos cualesquiera. En este momento resultan de interés las transformaciones del plano que se conservan las distancias entre dos puntos cualesquiera del plano y las mismas se denotan por letras griegas minúsculas como: □(rho), □ (sigma), □ (tau), etc.

La transformación □ del plano □ se denomina movimiento o isometría del plano □ si y sólo si □ conserva la distancia entre dos puntos cualesquiera A y B, es decir, si y sólo si d(A,B)= d(□(A), □(B)

Según la definición anterior dos movimientos son equivalentes significa que ambos mueven cada punto del plano a la misma posición final, aunque lo hagan siguiendo recorridos diferentes.

En situaciones prácticas sólo se hace referencia al movimiento de figuras y en estos casos se consideran aplicaciones biyectivas de subconjuntos del plano □ sobre subconjuntos del plano□. Observe que el concepto de movimiento de figuras es más general que el de movimiento del plano, pues el plano es también una figura.

En un movimiento idéntico se dice que todos los puntos de la figura correspondiente son puntos fijos o invariantes

Como la composición de dos movimientos es también un movimiento entonces el producto

CD Monografías 2019

ISBN: 978-959-16-4317-9

de un movimiento y su inverso también es un movimiento, en particular es el movimiento idéntico I

En cualquier movimiento □ de una figura en el plano □ se denomina:

a) *Punto fijo o invariante* a cada punto P que coincide con su imagen P□.
b) *Recta fija o invariante* a cada recta r que coincide con su imagen r□.

c) *Recta fija de puntos fijos* a cada recta s formada solamente por puntos fijos.

A continuación, se abordan los movimientos específicos de los cuales se estudian las definiciones y propiedades. Las definiciones que se dan expresan las propiedades suficientes para construir las imágenes en cada caso, por esta razón estas definiciones se llaman definiciones *constructivas*

Comúnmente muchas personas amantes de las bellezas de la naturaleza y del arte, son atraídas por estas por las tonalidades y combinaciones de los colores, así como por la relación de posición que existe entre los elementos reflexión de eje r que componen lo observado

Un movimiento □ del plano se denomina si y sólo si se cumple que ***:***

1) r es una recta fija de puntos fijos, es decir, para todo punto P □ r P□=P.

Cada punto P□ r se transforma en un punto P□ tal que la recta r es mediatriz del segmento

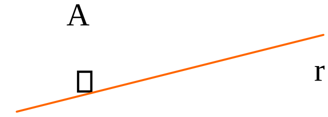
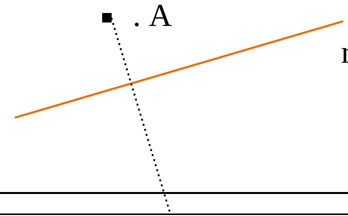
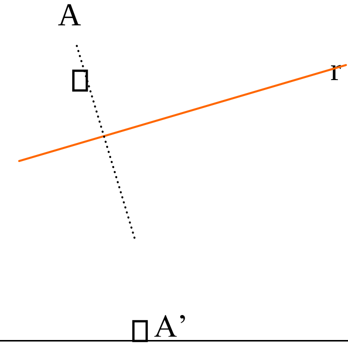
P P□

Propiedades

a) En toda reflexión □ de eje r se cumple que la imagen de un semiplano de borde r es el semiplano opuesto, es decir los semiplanos de borde r se permutan.
b) En toda reflexión □ de eje r se cumple que los puntos del eje r son los únicos puntos fijo***s.***
c) En toda reflexión □ de eje r se cumple que el eje r y las rectas perpendiculares al eje son las únicas rectas fijas.
d) Toda reflexión □ de eje r es un movimiento involutivo, o sea $□_r$ o $□_r$ =1.
e) Dados dos puntos diferentes P y P□, existe una y solo una reflexión □ tal que P□ = P□.

La definición de reflexión de eje r permite plantear el siguiente algoritmo para la construcción de puntos imágenes.

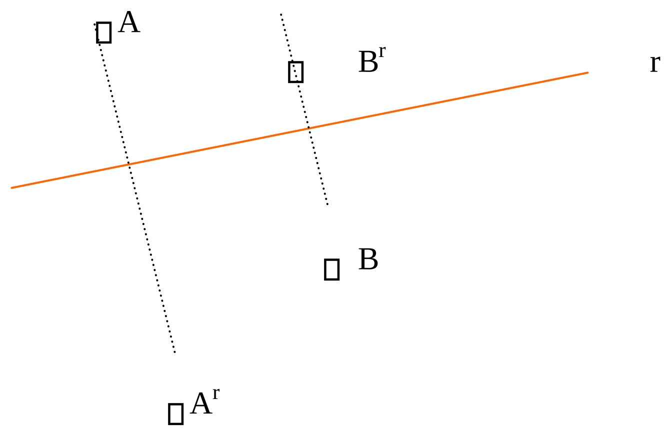
CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

Construcción de la imagen del punto A por la reflexión de eje r.	
1.-Se traza una perpendicular al eje r que pase por el punto A y corte a r en un punto O.	
2.-Se transporta el segmento OA sobre la semirrecta OA^{-}, a partir de O, determinando el punto A□ tal que A□= A^{r}.	

En la construcción de imágenes de puntos por reflexión de eje r se emplea dos construcciones geométricas fundamentales: la construcción de una recta perpendicular a una recta dada (el eje) por un exterior. Y el transporte de segmentos. En el caso de las perpendiculares se puede emplear cualquiera de los procedimientos abordados anteriormente, aunque se sugiere emplear la regla y el cartabón.

Los puntos originales pueden estar en diferentes semiplanos con respectos al eje, en cada caso se procede de igual forma y por supuesto las imágenes estarán en semiplanos opuestos.

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9



Para la construcción de la imagen de un polígono cualquiera basta hallar la imagen de cada uno de los vértices y después unirlos adecuadamente.

El eje de simetría puede estar en diferentes posiciones con respecto al polígono, por ejemplo, el eje puede:

a) No tener puntos comunes con el polígono.
b) Pasar por uno de sus vértices.
c) Contener a uno de sus lados, o sea pasar por dos vértices consecutivos.
d) Pasar por puntos interiores.

El estudio que se ha realizado acerca de la reflexión con respecto a una recta le permite al lector construir dibujos que presenten cierta armonía que satisfaga nuestra vista, armonía que se encuentra, como se planteó al inicio de este epígrafe, en la naturaleza, en obras arquitectónicas, en dibujos y pinturas, etc. Esta armonía de que se habla se denomina simetría axial

Dos figuras planas cualesquiera F y F′ son axialmente simétricas o tienen simetría axial si y sólo si existe una recta r tal que F′ es la imagen de F por la reflexión de eje r. En particular *una figura es axialmente simétrica* si y sólo si existe al menos una recta r tal que $F^r = F$. La recta r se denomina eje de simetría

El estudio de la composición de reflexiones se hace atendiendo a la relación de posición entre sus ejes, esta relación evidentemente da lugar a dos situaciones:

1.- Los ejes son paralelos

2.- Los ejes se intersecan

Efectivamente, la reflexión o simetría axial invierte el sentido de los ángulos, en general invierte a la figura, esta característica hace que el movimiento de reflexión se denomine movimiento inverso. Debido a esta característica se tiene que la reflexión, físicamente, no es un movimiento, pues para que una figura y su imagen puedan superponerse se tiene que sacar uno de ellos del plano, por este motivo es frecuente asociar la reflexión del plano a la

ISBN: 978-959-16-4317-9

acción de volver una hoja del libro

TRASLACIONES EN EL PLANO

El término "*traslación*" es utilizado diariamente para indicar acciones o efectos como:

- Mudar de lugar.
- Hacer pasar una persona de un cargo a otro.
- Cambiar la fecha u hora de una reunión.
- Copiar un escrito.

También en ocasiones en lugar de traslación se emplean los términos: desplazamiento y deslizamiento.

Se denomina segmento orientado o vector AB**,** en símbolos AB, si y sólo si se considera el sentido de dirección de la semirrecta AB+.

Un movimiento del plano se denomina traslación de vector PQ si y sólo si se cumple que transforma a cada punto X del plano en un punto X' tal que XX es equipolente con PQ.

ATENCIÓN

Parece evidente decir que dos puntos determinan una y sólo una traslación de manera análoga a como se analizó en las reflexiones, pero esto no es así en el caso de las traslaciones. Dos puntos diferentes determinan un y sólo un segmento, pero en este se pueden considerar dos segmentos orientados, uno es el opuesto del otro. Luego, dos puntos diferentes determinan dos traslaciones cuyos vectores son opuestos, estas traslaciones se llaman *traslaciones opuestas*. Por tanto, lo correcto es decir que: *Un punto y su imagen determinan una y sólo una traslación o un par ordenado de puntos determinan una y sólo una traslación*.

CONSTRUCCIÓN DE LA IMAGEN DE UN PUNTO A POR LA TRASLACIÓN DE VECTOR $\overrightarrow{PQ}$.

1.-Se traza una semirrecta de origen A con igual sentido de dirección que $\overrightarrow{PQ}$.

2.- Se transporta el segmento $\overrightarrow{PQ}$ sobre la semirrecta anterior a partir de A, obteniendo el punto A´, imagen de A

En toda traslación   ***I*** se cumple que:

a) No hay puntos fijos.

b) Toda recta y su imagen son paralelas.

c) Las únicas rectas fijas son las rectas paralelas al vector de traslación

El producto de reflexiones cumple:

a) Todo producto de dos reflexiones de ejes paralelos es equivalente a una traslación cuyo vector u es perpendicular a los ejes y su longitud es el doble de la distancia entre estos ejes y su sentido está determinado por el orden de las reflexiones.

b) Toda traslación de vector u es el producto de dos reflexiones cuyos ejes son

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

perpendiculares al vector y la distancia entre los ejes es la mitad de la longitud del vector y cuyo orden está en correspondencia con el sentido de dirección de la traslación.

El producto de dos traslaciones es una traslación

Además, se cumple que:

1.- La composición de traslaciones es una operación interna, porque la composición de dos traslaciones es una traslación.

2.- Existe una traslación □n para toda traslación □□tal que se cumple □n o □□ = I, esta traslación es la traslación nula.

3.-Para toda traslación □□existe una traslación □-1 tal que □□o□ -1=I.

4.- La composición de traslaciones es conmutativa.

5.- La composición de traslaciones es asociativa.

ROTACIÓN. REFLEXIÓN CON RESPECTO A UN PUNTO

También es muy frecuente escuchar expresiones tales como gira o rota un ángulo, por lo que se hace necesario precisar un nuevo concepto de ángulo.

Un ángulo □□(p;q) se denomina ángulo orientado, en símbolos □(p;q), si y sólo si (p;q) es considerado un par ordenado, o sea, p es el lado inicial y q el final.

Un movimiento □□del plano se denomina **rotación de centro O y ángulo** □(p;q) si y sólo si se cumple que:

1.- O es un punto fijo, es decir O =O□

2.- Cada punto P□□O se transforma en un punto P tal que □POP□□tiene la misma orientación y amplitud que □(p;q).

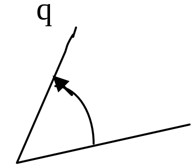
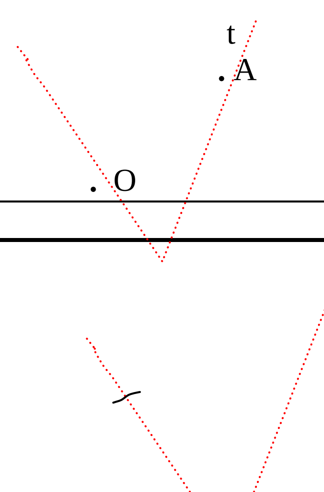
En toda rotación □□I se cumple que el centro de rotación es el único punto fijo.

En toda rotación □ se cumple que todo punto y su imagen equidistan del centro.

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

Basándose en la definición de rotación y en el teorema anterior se plantea el siguiente algoritmo para construir puntos imágenes por una rotación.

2.-Se transporta el segmento OA sobre la semirrecta t' y el punto que se obtiene es el punto A' imagen de A.	t' t A' . . A . O

Construcción de la imagen del punto A por la rotación □ de centro O y ∡(p;q).	A . O . q  p
1.-Se transporta el ángulo (p,q) a partir de la semirrecta t=OA $^{+}$, de modo que el ángulo obtenido ∡(t; t') tenga igual orientación que ∡(p;q). La semirrecta t' es la imagen de la semirrecta t.	t' t . A . O 

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

Toda rotación está determinada unívocamente dados: a)
el centro, un punto y su imagen.
b) un par de puntos y sus respectivas imágenes.

Obtención de una rotación como producto de reflexiones

a) El producto de dos reflexiones de ejes que se cortan en un punto es equivalente a una rotación cuyo centro es el un punto de intersección de los ejes y el ángulo de rotación tiene como amplitud el doble la amplitud menor determinada por la intersección de los ejes y su orientación coincide con el orden de los ejes en la composición.
b) Toda rotación □□I es equivalente al producto de dos reflexiones cuyos ejes se cortan en el centro de rotación y la amplitud menor de los ángulos que determinan es la mitad de la amplitud del ángulo de rotación.

LA REFLEXIÓN CON RESPECTO A UN PUNTO

Un movimiento □ del plano se denomina reflexión de centro C , en símbolos $□_C$, si y sólo si □ es una rotación de centro C y ángulo de rotación de amplitud 180^o.
Toda reflexión con respecto a un punto C transforma a toda semirrecta de origen C en su semirrecta opuesta.
Un movimiento □ del plano se denomina *reflexión de centro C* si y sólo si se cumple que:

1) C es un punto fijo.
2) Cada todo punto P distinto de C se transforma en un punto P^C tal que C es el punto medio del segmento PP^C.

Para toda reflexión □ de centro C se cumple:
a) El centro C es el único punto fijo.
b) El centro c es el punto medio de todo segmento que une a un punto con su imagen.
c) Las rectas que pasan por el centro C son las únicas rectas fijas.
d) Toda recta (semirrecta, segmento) y su imagen son paralelas.
e) Para todo punto P□C se cumple $(P^C)^C$=P, $□_C$ o $□_C$ =I, es decir la reflexión con respecto a un punto es un movimiento involutivo.
f) $□_C$ está determinada unívocamente dado:
   - el centro
   - un punto y su imagen
   - un par de ejes que se cortan perpendicularmente

1.6 Diagnóstico del estado actual y acciones para la profundización de los conocimientos geométricos

Para constatar el estado actual de las dificultades determinadas en las carreras de licenciatura en primaria al recibir los contenidos de geometría y los resultados en los exámenes finales de la asignatura con respeto a estos contenidos así como los contenidos

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

de representación de superficies en un sistema de coordenadas para poder determinar los límites de integración de una integrar triple en cálculo para las carreras agronomía y contabilidad en nuestra cede, fueron aplicados diferentes métodos empíricos lo que permiten destacar:

1- Dificultades con el uso de los instrumentos de dibujos.

2- Falta de conocimientos teórico de conceptos.

3- Dificultades en la representación gráfica.

4- El lenguaje en el campo matemático como ayuda a la comprensión y a la argumentación.

5- La motivación con respeto la geometría

6- Existen insuficiencias en el desarrollo de habilidades para el trabajo en la geometría, trabajo con conceptos geométricos.

Para el desarrollo de este trabajo se ha tenido en consideración las características individuales de los estudiantes en la muestra tomada, sus diferentes niveles del desarrollo, deficiencias y potencialidades, para promover en ellos el desarrollo hasta el límite de sus posibilidades.

Al elaborar estas acciones se tuvieron en cuenta tres etapas fundamentales**.**

Primera etapa: Diagnóstico.

En esta etapa partiendo de los instrumentos aplicados a los estudiantes, buscando las principales insuficiencias, que le permitan obtener un mayor dominio de los contenidos geométricos incluyendo el cómo aprenderlo para posteriormente aplicarlo la solución de ejercicios geométricos

Segunda etapa: Ejecución.

En esta etapa se desarrollan todo un conjunto de acciones dirigidas a la apropiación del objeto de estudio mediante su transformación paulatina, se centra además en el trabajo con el contenido que se debe aprender para dar solución a la problemática planteada y lograr los objetivos propuestos de acuerdo a los núcleos básicos del contenido geométrico tratados según la línea directriz geometría

Tercera etapa: Control y evaluación.

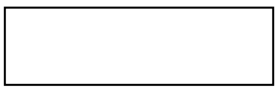
Como en todo tipo de actividad la fase de control desempeña un importante papel, ya que nos permite evaluar la evolución individual de cada uno y retroalimentarnos de la

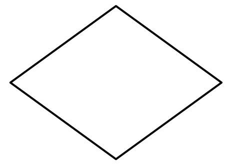
ISBN: 978-959-16-4317-9

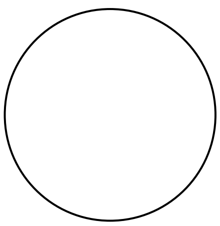
efectividad del trabajo realizado por él. Es muy importante el componente auto valorativo. El maestro debe propiciar el análisis individual y colectivo del producto de la actividad, favoreciendo la rectificación de los errores que puedan presentar y estimulando la función desarrolladora de este componente

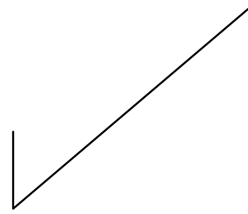
Actividades

1- Determine qué tipo de simetría tienen las siguientes figuras, en cada caso señale el elemento fundamental.

a) 

b) 

c) 

d) 

2 - El segmento $\overline{A'B'}$ es la imagen del $\overline{AB}$ por una rotación□, determine el centro y ángulo de rotación. Sugerencia tenga en cuenta que un punto y su imagen por rotación equidistan del centro de rotación.

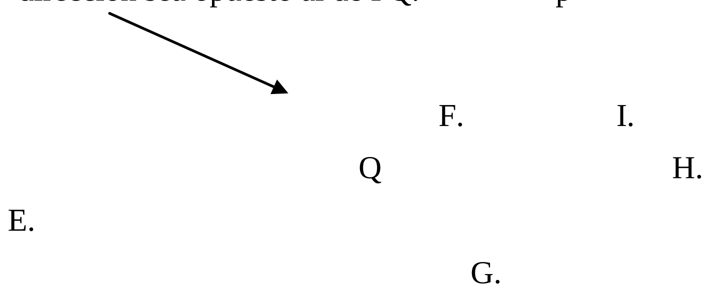
A′ B

B′

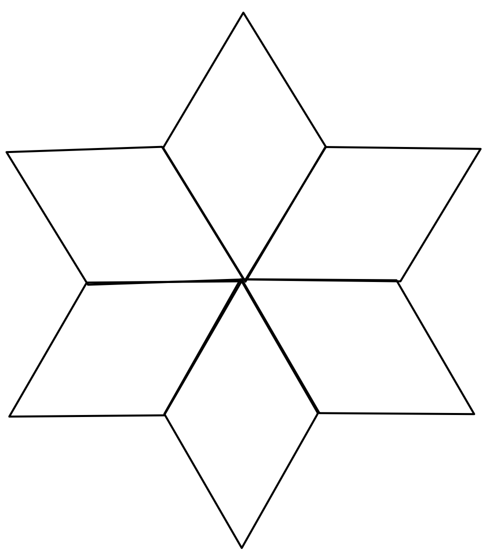
A

CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

3 Dado el vector PQ, traces vectores equipolentes que tengan respectivamente a E, F y G como puntos originales y uno que tenga a H como punto imagen. Trace otro vector que tenga a I como original y que tenga la misma longitud que PQ, pero que su sentido de dirección sea opuesto al de PQ. p



4 Construya un rombo de modo tal que al aplicarle reflexiones sucesivas se obtenga una figura como la siguiente:



CD Monografías 2019
(c) 2019, Universidad de Matanzas
ISBN: 978-959-16-4317-9

a) Diga qué característica especial debe tener el rombo que genera este cubrimiento.
b) ¿Cuántas reflexiones realizó y cuáles son los ejes?
c) Analice si existen otras composiciones de reflexiones que genere este cubrimiento.
d) ¿Cuál es la menor cantidad de reflexiones que se puede realizar para generar este cubrimiento?
e) Calque varias veces la siguiente figura, recórtelas y pegue una en cada rombo de modo que estén en correspondencia con las reflexiones efectuadas**.**

CONCLUSIONES

El desarrollo acelerado de la ciencia, la tecnología y el arte en nuestros días, así como las transformaciones sociales que desarrolla nuestra Revolución con su inmensa connotación humana requiere de una gran cantera de profesionales, prioritariamente en el sector educacional. Lo anterior incentiva a buscar vías y métodos para garantizar una preparación adecuada de los docentes en el tema tratado

Aunque en las diferentes etapas por las que esta formación general transcurre existen indicaciones para desarrollar este trabajo, no se realiza con el suficiente nivel de sistematización.

El análisis teórico realizado, la valoración del diagnóstico favorecerán la elaboración de la propuesta de actividades para dar respuesta a situaciones de la vida que los obligaban a buscar nuevos conocimientos que le dieran solución a los problemas de la cotidianidad, utilizando elementos geométricos esperando una mayor profundización y motivación por parte de los estudiantes en esta rama de la matemática para ello se trabajó *los procedimientos* heurísticos en la enseñanza de la matemática partiendo del diagnóstico realizado

Bibliografía:

Adecuaciones de los programas de tercer y cuarto grado a partir del curso 2011-2012.

ALMEIDA CARAZO, BERNARDINO A Y MARÍA DE LOS ÁNGELES VALDIVIA SARDIÑAS. L*os procedimientos* heurísticos en la enseñanza de la matemática. Universidad Pedagogical “Juan Marinello”. Matanzas. Cuba, 2011

BALLESTER PEDROSO, SERGIO. Metodología de la Enseñanza de la Matemática.

ISBN:

Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación, (1992).

BALLESTER, S. Y OTROS. Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I Editorial Pueblo y Educación. Cuba. 2001.

BALLESTER, S. Y OTROS Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo II. Editorial Pueblo y Educación. Cuba. 2001

BARCIA, ROBERT. Geometría para maestros primarios. Primera parte. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 2002

BLUMENTAL, LEONARDO M. Geometría axiomática. España: Ediciones Aguilar,1965.

CD de carreras: primaria, secundaria básica y preuniversitario por áreas del conocimiento. MINED Versión 5, 2006.

DAVIDSON SAN JUAN,LUIS J. Educaciones y Matemáticos. Cuba. Pueblo y Educación, 2008

DÍAZ GONZÁLEZ, M. Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Primaria I. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 2004.

_____ Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Primaria II. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 2007.

MINED. Programa de Matemática Educación Primaria. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 2007.

EFÍMOV, N.V. Geometría Superior. Moscú: Mir, 1978

HOFMANN, E. Historia de la Matemática. La Habana: Revolucionaria, 1968.

HOGBEN, LANCELOT. 25.000 Años de Matemáticas. Barcelona: Ediciones Daimon. 1959

POGORÉLOV, A.V. Geometría Elemental. Moscú: Mir, 1974

THOMPSON, J.E. Geometría. México: UTEHA, 1961

ISBN: