

EL MÉTODO DE LA FUNCIÓN DE GREEN EN LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR EN UNA DIMENSIÓN FINITA

Lic. Alejandro González González¹

1. Universidad de Matanzas – Sede “Juan Marinello”, Matanzas,
Cuba. alejandro.glez@umcc.cu

Resumen

En este trabajo se aborda la modelación de la conducción del calor desde la perspectiva de los métodos analíticos de solución de la ecuación de difusión del calor. En particular se expone el método de la Función de Green obtenida mediante separación de variables en el caso unidimensional en el cuerpo finito lo cual tiene aplicaciones prácticas inmediatas en la modelación de situaciones físicas de interés en la asignatura de Transferencia de Calor. Se explica con todo detalle el método de separación de variables así como la solución del problema de Sturm-Liouville asociado. Se espera que este trabajo sirva de referencia como material de consulta a los interesados en el método y en la modelación de la conducción del calor en general.

Palabras claves: *Función de Green; separación de variables; ecuación del calor; conducción del calor.*

INTRODUCCIÓN

Hoy en día el estudio de los procesos de transferencia de calor es de vital importancia en la educación en ingeniería. En una economía global que se contrae y en un mundo de grandes desafíos tecnológicos y ambientales, las universidades de todo el mundo se están planteando nuevas prioridades educativas y decidiendo qué programas o asignaturas serán de utilidad y cuáles no, para la educación de las futuras generaciones de ingenieros.

Sin embargo, reconociendo el alto valor que tiene la educación para la sociedad, las inversiones en la educación ingenieril están aumentando sostenidamente a nivel global. Desde el punto de vista pedagógico hay un interés renovado en la enseñanza de los fundamentos y principios de las ciencias de manera que estos puedan ser aplicados durante toda la vida útil del ingeniero. En este sentido, el conocimiento sobre los procesos de transferencia de calor hace posible su aplicación en numerosos campos del conocimiento emergentes del siglo XXI como la generación y almacenamiento de energías alternativas, el estudio de efectos ambientales asociados a los cambios de temperatura, tecnologías aplicadas a la biotecnología, farmacología y teoría de la información, entre otras.

En Cuba, en la educación ingeniera falta el estudio sistemático de los métodos analíticos de solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La mayoría de las carreras de ingeniería en Cuba utilizan asignaturas tales como Transferencia de Calor, Transferencia de Masa, Procesos de Transporte, etc, para enseñar a resolver los tipos específicos de ecuaciones en derivadas parciales que aparecen en los problemas relacionados con la asignatura.

Sin embargo, no existe una disciplina o asignatura dedicada al estudio matemático de estos problemas. No tiene hoy el ingeniero cubano una perspectiva clara del alcance de "su matemática" pues al trabajar problemas específicos sin abstraerse en la matemática, no domina los aspectos analíticos de rigor matemático. Podría estar intentando resolver una ecuación parabólica para la conducción del calor y luego intentar resolver la misma ecuación para la difusión de partículas (transporte de masa) sin saber que las propiedades matemáticas de la solución del primer problema le sirven para resolver el segundo.

Es por este motivo que se ha planteado la necesidad de contar con textos explicativos a manera de guías que, a falta de una asignatura propia y con un programa organizado, llenen estos vacíos en la educación matemática del ingeniero. La información aparece dispersa en diferentes textos y la idea será ir organizando en monografías los diferentes intereses para agrupar bajo una misma temática toda la información dispersa.

En cuanto a la conducción del calor, los mecanismos de transferencia del calor aparecen mejor explicados en (Bergman et al., 2011), sin embargo este magnífico texto no tiene el rigor matemático de tratamiento analítico de las ecuaciones que podemos encontrar en los textos de (Antuña, 1992; Carslaw and Jaeger, 1959; Cole et al., 2011) aunque tiene

ejemplos de alto valor pedagógico y técnico. La explicación de la deducción de la ecuación del calor se ha tomado de (Bergman et al., 2011), mientras que los métodos de la Función de Green y de separación de variables se han tomado de diversas fuentes (Cole et al., 2011; Pinsky, 2003; Tikhonov and Samarskii, 1963; Yakimov, 2016).

El método de la función de Green tal y como aparece en (Cole et al., 2011) ha sido demostrado equivalente a la propuesta de (Antuña, 1992) de separar el problema general de frontera en varios problemas con diferentes condiciones iniciales y de frontera aplicando el Principio de Superposición. No obstante el método de separar en distintos problemas de frontera corre el riesgo de agotar la cantidad permisible de cuartillas disponible en una monografía si se quiere resolver al menos un problema con todo detalle.

Por este motivo, dada la dispersión de la información en lo referente a los métodos analíticos para resolver la ecuación del calor y dado el alto valor pedagógico que se le atribuye al método de la Función de Green se ha planteado como objetivo de este trabajo exponer el método de la Función de Green en la solución de la ecuación parabólica del calor unidimensional en cuerpos de dimensión finita. El método se aplica, a modo de ejemplo, en el caso de la conducción en una pared de diferentes materiales que responden muy diferentes a la conducción del calor: acero y madera.

Es nuestro criterio que este trabajo puede ayudar a mejorar la educación matemática de los ingenieros y así acercar un poco a los mismos al campo de la ciencia pura y aplicada.

DESAROLLO

Mecanismos de transferencia de calor. Ley de Fourier de la conducción.

La transferencia de calor es un proceso que ocurre debido a una diferencia de temperatura entre dos puntos en el espacio. Los mecanismos o modos en que esto puede ocurrir son tres: conducción, convección y radiación. La conducción es el mecanismo de transferencia de calor que se establece cuando en el medio, que puede ser sólido o fluido (líquido o gas), existe un gradiente de temperatura y la transferencia ocurre dentro del medio. El término convección se refiere a la transferencia de calor entre una superficie y un fluido en movimiento que están a diferentes temperaturas. El tercer modo, la radiación térmica, se refiere a la energía calorífica transmitida en forma de ondas electromagnéticas por los cuerpos calientes. En este trabajo nos concentraremos en el modo de conducción del calor.

Los mecanismos físicos de conducción del calor en sólidos, líquidos y gases son parecidos pero tienen sus diferencias. En el caso de gases y líquidos el mecanismo es muy parecido a la difusión (transporte de masa). Las moléculas de gases o líquidos chocan entre sí transfiriendo energía desde las más energéticas a las menos energéticas y el transporte se efectúa en la dirección decreciente del gradiente de temperatura impuesto sobre el sistema. Cuando las moléculas se mueven dentro del medio, difunden la energía asociada a ellas de

acuerdo a los grados de libertad activados por el aumento de la temperatura del sistema (traslacionales, rotacionales y por último los vibracionales). Entonces se puede hablar de un transporte neto de energía debido al movimiento molecular aleatorio como *difusión de energía*.

En el caso de los sólidos, la conducción del calor se debe fundamentalmente a la activación de modos de vibración de la red (fonones) que son modos colectivos asociados a toda la red cristalina y que se activan con el aumento de la temperatura. En el caso de los sólidos conductores de la electricidad, como los metales, además de la transferencia de energía fonónica existe transporte de energía asociado al movimiento de los electrones libres (de conducción) debido a su interacción mutua y con los iones, casi fijos, de la red cristalina.

Todos los procesos de transferencia de energía por cualquiera de los tres modos, pueden cuantificarse desde el punto de vista *macroscópico* con ecuaciones de velocidad de cambio (*rate equations*). Estas ecuaciones se utilizan para calcular la cantidad de energía transferida por unidad de tiempo. En el caso de la conducción, esta ecuación se conoce como Ley de Fourier que se obtiene de forma empírica a partir de generalizaciones basadas en evidencias experimentales. En el caso unidimensional se escribe como:

$$q'' = -k \frac{dT}{dx} \quad 1.$$

donde q'' (W/m^2) es la velocidad de transferencia de energía en la dirección del eje X por unidad de área perpendicular a la dirección de la transferencia y es proporcional al gradiente de temperatura (dT/dx) en esa dirección. El parámetro k es una propiedad de transporte denominada *conductividad térmica* (W/m.K) y es característica del medio material donde ocurre la conducción. Físicamente representa la capacidad del medio para conducir el calor. El signo menos indica que el calor se transmite desde las regiones donde las temperaturas son más altas hacia las regiones de más baja temperatura, por lo que el gradiente es negativo.

Esta ley nos indica que el flujo de calor es una magnitud direccional (vectorial), o sea, q'' está siempre dirigido por la normal a la superficie de temperatura constante (superficie isotérmica). De esta forma, en tres dimensiones, la Ley de Fourier se escribe como:

$$\vec{q}'' = -k\vec{\nabla}T = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \right) \quad 2.$$

donde $\vec{\nabla}$ es el operador Nabla que al actuar sobre el campo escalar de temperaturas $T(x, y, z, t)$ produce una magnitud vectorial: el flujo de calor. En este caso se ha supuesto que el medio es isotrópico por lo que la conductividad térmica (k) es independiente de las

coordenadas. Esta ley es aplicable a todo tipo de medio (sólido, líquido o gas) y constituye la pieza fundamental en el análisis de la transferencia de calor por conducción.

La ecuación de difusión del calor.

Uno de los objetivos más importantes en el análisis de los procesos de conducción es la determinación del campo de temperaturas, o sea, la función escalar $T(x, y, z, t)$ en un medio debido a las condiciones iniciales y de frontera impuestas al mismo. Si se conoce esta distribución de temperatura, es posible determinar los flujos de calor en cualquier punto del medio utilizando la Ley de Fourier. En el caso de los sólidos, la determinación del campo de temperaturas es de extrema importancia al estudiar la integridad estructural mediante la determinación de tensiones, expansiones y flexiones, para optimizar el ancho de capas de aislante térmico o para determinar la compatibilidad de recubrimientos especiales o adhesivos utilizados sobre el material de base (Cole et al., 2011).

Para determinar la ecuación de difusión del calor o simplemente la ecuación del calor, debemos tomar un volumen de control diferencial, identificar los procesos de transferencia de energía relevantes e introducir las ecuaciones de velocidad apropiadas (Ley de Fourier). El resultado es una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya solución, para determinadas condiciones de frontera, nos dará la distribución de temperatura en el medio material. La derivación de esta ecuación puede hallarse en casi cualquier libro de transferencia de calor (Bergman et al., 2011; Bird et al., 2002; Tikhonov and Samarskii, 1963):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 3.$$

donde el producto (ρc_p) es la capacidad calorífica volumétrica (densidad de masa x capacidad calorífica a presión constante) y es una medida de la capacidad del sistema de almacenar energía térmica.

Esta es la Ecuación del Calor en coordenadas cartesianas y es el resultado de aplicar a un volumen de control la Ley de Conservación de la Energía. Cada uno de los términos de las derivadas espaciales se refiere a la conducción neta de calor (flujo) hacia dentro del volumen de control en la coordenada especificada. El término q se refiere a la densidad de fuentes (o sumideros) de energía, o sea a la generación o pérdida de energía dentro del volumen de control asociada a una fuente. El término del miembro derecho relacionado con la derivada temporal sobre $T(x, y, z, t)$ se refiere a la tasa de cambio temporal de la energía en el medio. La conservación de la energía establece que *en cualquier punto en el medio material la velocidad neta de transferencia de energía por conducción dentro de un*

volumen unitario (de control) más la tasa de cambio volumétrica de la generación de energía debe ser igual a la tasa o velocidad de cambio de la energía térmica almacenada en el volumen.

Como puede verse, en general la conductividad térmica (k) puede ser dependiente de la temperatura aún para medios isotrópicos lo que convierte a esta, en una ecuación no lineal. Para el caso en que la conductividad térmica es independiente de la temperatura se puede escribir:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 4.$$

donde $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ es la difusividad térmica que da una medida de la capacidad del sistema de conducir el calor respecto a su capacidad para almacenarlo. Esta ecuación puede escribirse también en coordenadas cilíndricas o esféricas respectivamente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 5.$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 6.$$

Condiciones Iniciales y de Frontera.

Desde el punto de vista matemático, la ecuación del calor es una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico, lineal y con coeficientes constantes si se supone que k, α y otras propiedades que aparecerán luego, son independientes de la temperatura (Antuña, 1992). La especificación completa del problema supone dar condiciones en la frontera del dominio sobre el que se va a resolver la ecuación y una condición inicial (pues hay una sola derivada temporal):

$$T(x, y, z, t = 0) = T_0(x, y, z) \quad 7.$$

Esta condición expresa cual es la temperatura del medio en todos sus puntos en el instante inicial que hemos supuesto como $t = 0$. Las condiciones de frontera más típicas pueden ser de tres tipos y todas se representan por la siguiente ecuación genérica (Carslaw and Jaeger, 1959; Cole et al., 2011):

$$k \frac{\partial T}{\partial n_j} \Big|_{\vec{r}_j} + h_j T|_{\vec{r}_j} = f_j(\vec{r}_j, t) \quad 8.$$

donde la derivada respecto a n_j es la derivada direccional respecto a la normal exterior a la frontera del dominio, o sea, $\frac{\partial T}{\partial n_j} = \overline{\nabla T} \cdot \hat{n}_j$ y h_j es el coeficiente de transferencia de calor en la superficie j-ésima, siendo $f_j(\vec{r}_j, t)$ una función de las coordenadas y el tiempo que toma sus valores sobre cada frontera del dominio.

Analicemos detenidamente esta ecuación genérica para poder identificar los tres tipos de condiciones de frontera. Para $\frac{\partial T}{\partial n_j} = 0$ y $h_j = 1$ esta ecuación describe las condiciones de frontera de primer tipo o de Dirichlet donde lo que se conoce es la temperatura sobre la frontera del dominio, por lo que en este caso $f_j(\vec{r}_j, t) = T_j(\vec{r}_j, t)$. En el problema de frontera de segundo tipo o de Neumann, lo que se conoce es el flujo de calor por la frontera y en la ecuación genérica, $h_j = 0$ y $f_j(\vec{r}_j, t) = q''_j(\vec{r}_j, t)$. En el tercer problema de frontera o de Robin, la ecuación genérica retiene todos sus términos. En el caso más común desde el punto de vista físico, $f_j(\vec{r}_j, t) = h_j T_\infty$, donde T_∞ es la temperatura ambiente, lo cual reproduce la ley de enfriamiento de Newton sobre la frontera del dominio, o sea, la condición de Robin expresa la posibilidad de un flujo de calor convectivo entre el medio donde ocurre la conducción y la superficie de separación entre este medio y el exterior que se supone que es un fluido a temperatura ambiente. La Tabla 1 resume los tres tipos de condición de frontera más comúnmente utilizados:

Tabla 1		
Tipo de Problema de Frontera	Expresión matemática	Sentido físico
1 ^{er} Problema (Dirichlet)	$T_j(\vec{r}_j, t) = f_j(\vec{r}_j, t)$	Temperatura fija en la frontera
2 ^{do} Problema (Neumann)	$k \frac{\partial T}{\partial n_j} \Big _{\vec{r}_j} = q''_j(\vec{r}_j, t)$	Flujo de calor conocido en la frontera
3 ^{er} problema (Robin)	$k \frac{\partial T}{\partial n_j} \Big _{\vec{r}_j} + h_j T _{\vec{r}_j} = h_j T_\infty$	Convección en la frontera por enfriamiento según ley de Newton

Planteamiento de los problemas de frontera.

Para poder decir que tenemos planteado un problema de frontera para la ecuación del calor debemos especificar la ecuación con todas sus funciones involucradas (fuentes de calor) y parámetros independientes o no de la temperatura y/o las coordenadas, la condición inicial, las condiciones de frontera y la geometría sobre la que se trabajará. Deben quedar bien

especificadas las distintas dependencias funcionales para que se entienda que tipo de problema trabajamos y poder elegir adecuadamente el método de solución.

La geometría particular sobre la que se trabaje define la cantidad de ecuaciones de frontera. Por ejemplo si nuestro dominio es una placa semi-infinita (con una dimensión infinita y las otras dos finitas, por ejemplo) necesitamos dar dos condiciones de frontera para cada dimensión finita y la condición de acotabilidad de las soluciones en el infinito, la cual, propiamente hablando, no es una condición de frontera pero es necesaria para lograr que las soluciones tengan sentido físico.

Así, por ejemplo, para el problema de frontera general y unidimensional, sobre un cuerpo finito de longitud L con temperatura inicial igual a una función de las coordenadas $F(x)$, el problema queda planteado así: determinar la función temperatura $T(x, t)$ que satisface:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k}q(x, t) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L \\ T(x, 0) &= F(x) \\ k \frac{\partial T}{\partial n_j} \Big|_{x_j} + h_j T|_{x_j} &= f_j(t) \quad t > 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad 9.$$

El método de la Función de Green para la ecuación del calor.

Planteamiento del problema de frontera para la Función de Green y solución general.

Para plantear el *problema auxiliar para la Función de Green* asociado al problema anterior se toman las condiciones de frontera y la condición inicial homogéneas (iguales a cero) y se sustituye la fuente de calor por una función delta de Dirac que representa una fuente puntual e instantánea de calor. Por lo tanto, la función de Green será una función generalizada (Antuña, 2014) que representa la respuesta del sistema a un estímulo puntual e instantáneo (Cole et al., 2011; Duffy, 2001):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{1}{k} \delta(x - x') \delta(t - \tau) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial g}{\partial t} \quad t > \tau \\ g(x, t|x', \tau) &= 0 \quad t < \tau \\ k \frac{\partial g}{\partial n_j} \Big|_{x_j} + h_j g|_{x_j} &= 0 \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad 10.$$

El problema de frontera para la Función de Green se puede plantear de otra manera equivalente a la anterior y es la que utilizaremos en este trabajo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial g}{\partial t} & t > \tau \\
g(x, t|x', \tau) &= \delta(x - x') & t < \tau \\
k \frac{\partial g}{\partial n_j} \Big|_{x_j} + h_j g|_{x_j} &= 0 & j = 1, 2
\end{aligned}
\tag{11}$$

Donde la condición inicial es una delta de Dirac. La solución general del problema de frontera original con las condiciones iniciales y de frontera no homogéneas estará dada a partir del Principio de Superposición mediante la Función de Green (Cole et al., 2011):

$$\begin{aligned}
T(x, t) = & \int_{x'=0}^L g(x, t|x', 0) F(x') dx' + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t d\tau \int_{x'=0}^L q(x', \tau) g(x, t|x', \tau) dx' \\
& + \alpha \int_{\tau=0}^t d\tau \sum_{j=1}^2 \left[\frac{f_j(\tau)}{k_j} g(x, t|x'_j, \tau) \right] - \alpha \int_{\tau=0}^t d\tau \sum_{j=1}^2 \left[T_j(\tau) \frac{\partial g}{\partial n_j} \Big|_{x'=x_j} \right]
\end{aligned}
\tag{12}$$

donde el último término es para las condiciones de frontera de Dirichlet y el penúltimo para las condiciones de Neumann y Robin (se utiliza uno o el otro pero no los dos al mismo tiempo). Cada término en esta expresión tiene unidades de temperatura. En el primer término, $F(x)$ tiene unidades de temperatura por lo que el producto $G dx'$ es adimensional y por lo tanto la función de Green tiene unidades de m^{-1} . En el segundo término, $q(x', \tau)$ tiene unidades de W/m^3 por lo que el producto $(\alpha/k)q(x', \tau) d\tau$ tiene unidades de temperatura. En el tercer término, las unidades de $f_j(\tau)$ son W/m^2 (flujo de calor) por lo que el producto $(\alpha/k_j)f_j(\tau)g d\tau$ tiene unidades de temperatura. Finalmente en el cuarto término $T_j(\tau)$ tiene unidades de temperatura por lo que $\alpha(\partial g/\partial n_j) d\tau$ es adimensional.

Como puede apreciarse, mediante (12) podemos encontrar el campo de temperaturas si se conoce la Función de Green del problema. Cada problema tiene su propia función de Green que viene dada por el tipo de geometría, la dimensionalidad del problema y las condiciones de frontera de su problema auxiliar. En el libro de (Cole et al., 2011) se ofrece una serie de Apéndices donde aparecen listadas, a partir de un cierto código de ordenamiento, una gran cantidad de funciones de Green para geometrías planas, cilíndricas y esféricas.

Métodos para hallar la Función de Green.

Para hallar la función de Green existen diversos métodos como por ejemplo el método de la Transformada de Laplace (Melnikov and Melnikov, 2012) que busca eliminar la variable temporal mediante una transformación integral y de esa forma quedarnos con un problema de frontera para la variable espacial, que en el caso unidimensional, es una ecuación diferencial ordinaria que es mucho más fácil de resolver que las ecuaciones en derivadas

parciales. Una vez hallada la solución de esta ecuación en el dominio transformado, se recupera la variable temporal haciendo transformada inversa de Laplace (Boyce and DiPrima, 2001; Carslaw and Jaeger, 1959; Cole et al., 2011).

Otro método muy utilizado es el de transformadas integrales que comienza igual que el anterior, con una transformada de Laplace, y continúa con transformada de Fourier (también de Abel, de Hankel, de Mellin) sobre la(s) variable(s) espacial(es). El objetivo es convertir todo el problema diferencial en uno algebraico en el dominio transformado para después recuperar las variables originales mediante inversión de la transformada (Antuña, 1992). Estos dos métodos, no obstante ser muy poderosos, adolecen de una dificultad técnica aunque no conceptual. Y es que a veces es difícil realizar la inversión pues la función que ha quedado en el dominio transformado no se ajusta a ninguna de las funciones con transformada conocida, y frecuentemente se deben utilizar funciones especiales como las hipergeométricas confluentes u otras que complican matemáticamente la solución que ya no se expresa en términos de funciones elementales.

El método de separación de variables puede aplicarse para resolver el problema siempre que las condiciones de frontera sean homogéneas (Antuña, 1992), como es el caso de cuando tratamos de hallar la función de Green. Ha sido muy utilizado en la solución de ecuaciones lineales ordinarias y en la solución de problemas de conducción del calor (Arpaci, 1966; Carslaw and Jaeger, 1959; Ozisik, 1980). En este método se tiene en cuenta que la condición inicial dada por $F(x)$ es desarrollable en serie de autofunciones del problema de Sturm-Liouville asociado (Antuña, 1992; Cole et al., 2011). La función $F(x)$ debe cumplir las condiciones del Teorema del Desarrollo:

- Debe ser una función continua y con hasta sus segundas derivadas continuas en su dominio de definición.
- Debe cumplir las condiciones de frontera del problema de Sturm-Liouville.

Método de Separación de Variables para hallar la Función de Green.

Los pasos de este método son:

- Proponer una solución que es el producto de funciones de una sola variable: $g(x, t) = X(x)T(t)$ (aunque aquí ejemplificamos con una sola variable espacial, el método es aplicable a problemas bi y tridimensionales).
- Sustituir la solución propuesta en la ecuación diferencial para separar las variables temporales y espaciales. El resultado es una

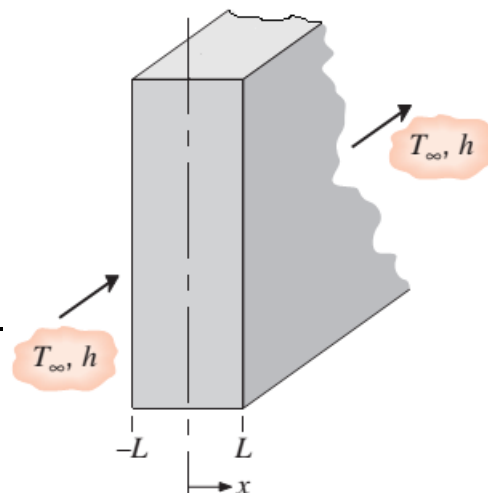


Figura #1. Pared plana con condición de frontera convectiva en $x = L$ y flujo de calor nulo en $x = 0$

relación de proporcionalidad con dos ecuaciones en forma de cocientes de funciones de la misma variable que se igualan a un valor constante (λ) que luego será reconocido como autovalor del problema de Sturm-Liouville. Se demuestra que esta constante solo puede tomar valores positivos (Antuña, 1992).

- Se resuelve por separado la parte temporal y la espacial. Esta última dá lugar al problema de Sturm-Liouville donde, a partir de las condiciones de frontera homogéneas del problema, se hallan los autovalores y autofunciones que cumplen varias propiedades (Antuña, 1992).
- El resultado es un conjunto infinito de autovalores y autofunciones que forman un sistema ortonormal y completo lo que permite el desarrollo de cualquier función que cumpla las condiciones del Teorema del Desarrollo. La solución (Función de Green) es la superposición de todas las soluciones para cada autovalor.

Aplicación a un caso de estudio

Para ilustrar el método, resolveremos un caso de estudio correspondiente al ejemplo del epígrafe 5.4 de (Bergman et al., 2011). Para una pared plana (Figura #1) sin fuentes internas de energía y con conductividad independiente de la temperatura, el problema unidimensional queda planteado así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} & t > 0, \quad 0 < x < L \\ T(x, 0) &= T_i \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) &= 0 \\ k \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) + hT(L, t) &= hT_\infty \end{aligned} \quad 13.$$

Si el problema se adimensionaliza tomando:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}, \quad x_* = \frac{x}{L}, \quad t_* = \frac{\alpha t}{L^2} \quad 14.$$

Entonces quedará planteado así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_*^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial t_*} & t_* > 0, \quad 0 < x_* < 1 \\ \theta(x_*, 0) &= 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_*}(0, t_*) &= 0 \end{aligned} \quad 15.$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_*}(1, t_*) + Bi\theta(1, t_*) = 0$$

Este problema ya tiene las condiciones de frontera homogéneas, necesarias para poder aplicar separación de variables, con una condición de Neumann en $x = 0$ y otra de Robin en $x = 1$, con $Bi = hL/k$. La condición inicial la hacemos igual a la delta de Dirac para encontrar la Función de Green: $\theta(x_*, 0) = \delta(x_* - x')$.

Proponemos $\theta(x_*, t_*) = X(x_*)T(t_*)$, sustituimos en la ecuación en (15) y dividimos toda la ecuación por $X(x_*)T(t_*)$:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= \frac{T'}{T} = -\lambda^2 \\ T(t_*) &= e^{-\lambda^2 t_*} \\ X'' + \lambda^2 X &= 0 \Rightarrow X(x_*) = C_1 \cos(\lambda x_*) + C_2 \sin(\lambda x_*) \\ X'(0) &= 0, \quad X'(1) + BiX(1) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

A partir de la primera condición de frontera, se obtiene que $C_2 = 0$, por lo que $X(x_*) = C_1 \cos(\lambda x_*)$. De la segunda condición de frontera para $x = 1$ se obtiene una ecuación trascendente que define los autovalores del problema de Sturm-Liouville de este problema:

$$\tan(\lambda_n) = \frac{Bi}{\lambda_n} \tag{17}$$

La solución buscada será:

$$\theta(x_*, t_*) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 t_*} \cos(\lambda_n x_*) \tag{18}$$

Al aplicar la condición inicial deltaica se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta(x_*, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x_*) = \delta(x_* - x') \\ \therefore C_n &= \frac{1}{N_n} \int_0^1 \delta(x_* - x') \cos(\lambda_n x_*) = \frac{\cos(\lambda_n x')}{N_n} \end{aligned} \tag{19}$$

$$N_n = \int_0^1 \cos^2(\lambda_n \xi) d\xi = \frac{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)}{4\lambda_n}$$

$$\therefore C_n = \frac{4\lambda_n \cos(\lambda_n x')}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)}$$

y la Función de Green será:

$$g(x_*, x', t_*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda_n \cos(\lambda_n x') \cos(\lambda_n x_*)}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 t_*} \quad 20.$$

Para hallar la solución completa para nuestro problema hay que aplicar (12) teniendo en cuenta que: i) el cuarto y último término no aparece porque no tenemos condiciones de frontera de Dirichlet, ii) el tercer término no aparece porque las funciones son nulas en los dos tipos de condiciones de frontera (una de Neumann homogénea en $x = 0$ y otra de Robin homogénea en $x = 1$), iii) el segundo término no aparece porque no tenemos fuentes de calor internas y iv) en el primer término la $F(x') = 1$, por lo que:

$$\theta(x_*, t_*) = \int_0^1 g(x_*, x', t_*) dx' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda_n \cos(\lambda_n x_*)}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 t_*} \int_0^1 \cos(\lambda_n x') dx'$$

$$\theta(x_*, t_*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin(\lambda_n)}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} \cos(\lambda_n x_*) e^{-\lambda_n^2 t_*} \quad 21.$$

Para representar esta función es necesario calcular varios autovalores de acuerdo con la ecuación (17). Con el siguiente código en Mathematica 9.0 es posible realizar este cálculo y obtener la serie para una cantidad específica de términos (Np) para cierto valor del número de Biot (scale):

```
Temp[x_, t_, Np_, scale_] :=
Module[{lista}, lista = Prepend[Table[π k, {k, 1, Np}], 0.1];
βn = FindRoot[Tan[x] ==  $\frac{scale}{x}$ , {x, lista}][[1, 2]];  $\sum_{n=1}^{Np} \frac{(4 \sin[\beta n[[n]]) e^{t (-\beta n[[n]]^2)} \cos[x \beta n[[n]])}{2 \beta n[[n]] + \sin[2 \beta n[[n]])}$ ]
```

En la Tabla 2 se muestran las propiedades de dos materiales muy distintos en cuanto a lo que se refiere a la conducción del calor: acero y madera (plywood). Véase como los números de Biot son muy diferentes.

Tabla 2						
Material	ρ	c_p	k	$\alpha \times 10^{-6}$	h	Bi

	(kg/m^3)	($J/kg \cdot K$)	($W/m \cdot K$)	(m^2/s)	($W/m^2 \cdot K$)	
AISI 347	7978	480	14.2	3.71	15	0.11
Plywood	545	1215	0.12	0.181	30	25

El número de Biot es una medida de la caída de temperatura en el sólido relativa a la diferencia de temperatura entre la superficie del sólido y el fluido y se puede interpretar además como una razón entre resistencias térmicas. En particular si $Bi \ll 1$, la resistencia a la conducción dentro del sólido es mucho menor que la resistencia a la convección a través de la superficie del mismo y por lo tanto se puede suponer una distribución uniforme de temperatura dentro del sólido ($T(x, t) \approx T(t)$) si el número de Biot es pequeño (Bergman et al., 2011). Este comportamiento es típico de los buenos conductores del calor como los metales, tal y como se aprecia en la Tabla 2. Por otra parte, los aislantes del calor como la madera y otros, tendrán un número de Biot alto lo que indica una fuerte dependencia de la temperatura dentro del sólido con la distancia.

En la Figura #2 se muestra el gráfico de la función de Green obtenida suponiendo que actúa desde $x = x' = 0.5$. Se nota la forma aguda del pico característico de la delta de Dirac pues la función de Green, tal y como ya se explicó, es la respuesta del sistema a un estímulo puntual e instantáneo. Véase como a medida que pasa el tiempo el pico baja de altura y hay mayor dispersión lo que se corresponde con la disipación de la fuente en el instante inicial producto a la conducción del calor.

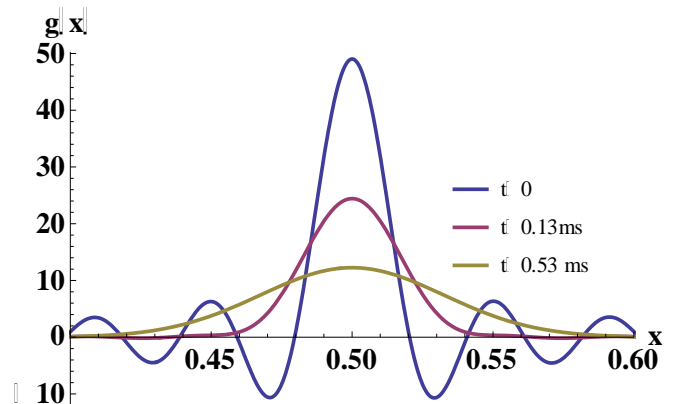


Figura #2. Función de Green para varios valores del tiempo.

La Figura #3 muestra la temperatura en función de la longitud adimensionalizada para el acero AISI 347 con número de Biot igual a 0.11 en distintos instantes de tiempo. Nótese que la última curva es para un tiempo de 15.3ms mientras que la primera fue para 0.13ms y aún la temperatura prácticamente no cambia dentro del metal. En la Figura #4 se muestra el mismo gráfico para el Plywood con número de Biot igual a 25. Se nota la fuerte dependencia de la temperatura con la distancia dentro de la placa. Los cálculos están hechos para una placa de 10cm de espesor y para 100 términos en la serie.

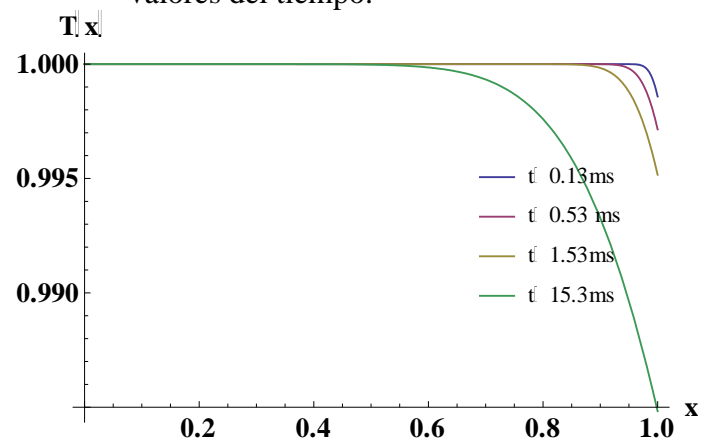
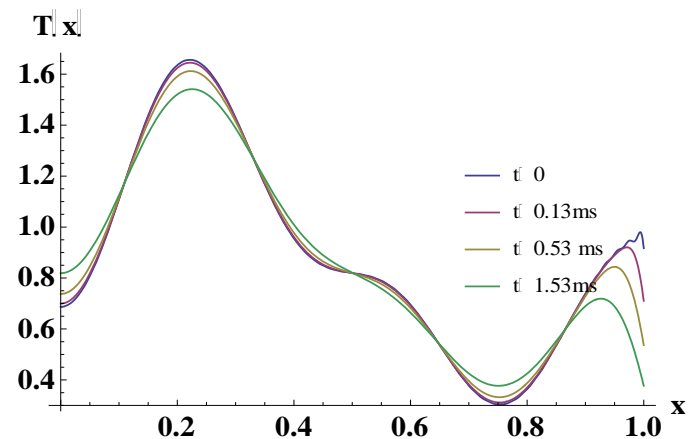


Figura #3. Temperatura para $Bi=0.11$ en diferentes instantes de tiempo en milisegundos.

CONCLUSIONES

En este trabajo monográfico se ha expuesto el método de la Función de Green para resolver la ecuación parabólica del calor ejemplificando su aplicación en el caso unidimensional en un cuerpo (pared) de longitud finita hecha de materiales que presentan diferentes comportamientos en la conducción del calor. El método de la Función de Green permite, en el caso general para casi cualquier tipo de condición de inicial o de frontera, calcular rápidamente la respuesta del sistema a condiciones no homogéneas por medio de la convolución de la Función de Green con las condiciones y la fuente de calor del problema a mano.



La ventaja principal es precisamente que solo se resuelve el problema una vez para el *tipo de condiciones* dadas, a diferencia de los métodos directos que, en cada caso, deben trabajar con las nuevas condiciones aunque lo único que se halla cambiado sean las funciones y no el tipo de condición. El método de separación de variables es más adecuado cuando se quiere averiguar el estado térmico del cuerpo para tiempos largos en comparación con los tiempos típicos de conducción del calor. Evidentemente este *tiempo de relajación* estará dado por el tipo de material y depende fuertemente de las propiedades de mismo como bueno o mal conductor del calor.

Las soluciones obtenidas por el método de separación de variables en general se expresan como una serie, que en el caso unidimensional adopta la forma de tipo trigonométrico de Fourier, la cual converge rápidamente para pocos términos en el desarrollo, siendo posible no tener que sumar toda la serie hasta el infinito, lo cual desde el punto de vista práctico es una ventaja sobre los métodos numéricos u otros métodos analíticos que pudieran necesitar una forja cerrada de la solución, no siempre expresable en términos de funciones elementales.

BIBLIOGRAFÍA

ANTUÑA, J. M. M. *Métodos Matemáticos de la Física*. Universidad de la Habana, 1992.

ANTUÑA, J. M. M. *Teoría de funciones generalizadas*. 1ra ed. Universidad de la Habana, Cuba: Editorial Universitaria, 2014.

ARPACI, V. S. *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley, 1966. 551 p.

BERGMAN, T. L., A. S. LAVINE, F. P. INCROPERA AND D. P. DEWITT *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 7th ed.: John Wiley & Sons, Inc., 2011.

BIRD, R. B., W. E. STEWART AND E. N. LIGHTFOOT *Transport Phenomena*. 2nd ed.: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

BOYCE, W. E. AND R. C. DIPRIMA *Elementary differential equations and boundary value problems*. 7th ed.: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

CARSLAW, H. S. AND J. C. JAEGER *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. New York, USA: Oxford University Press, 1959.

COLE, K. D., J. V. BECK, A. HAJI-SHEIKH AND B. LITKOUHI *Heat conduction using Green's functions*. edited by W.J. MINKWYCZ AND E.M. SPARROW. 2nd ed. Boca Raton, USA: Taylor & Francis, 2011.

DUFFY, D. G. *Green's functions with applications*. edited by S.G. KRANTZ. Boca Raton, USA: Chapman & Hall/CRC, 2001.

MELNIKOV, Y. A. AND M. Y. MELNIKOV *Green's Functions. Construction and Applications*. Walter de Gruyter GmbH & Co., 2012.

OZISIK, M. N. *Heat Conduction*. New York: Wiley Interscience, 1980.

PINSKY, M. A. *Partial differential equations and boundary-value problems with applications*. 3rd ed.: American Mathematical Society, 2003.

TIKHONOV, A. N. AND A. A. SAMARSKII *Equations of Mathematical Physics*. Instituto del Libro, 1963.

YAKIMOV, A. S. *Analytical solution methods for boundary-value problems*. Academic Press, 2016. 191 p.