LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL NIVEL PREUNIVERSITARIO

MsC. Julián Rogelio Álvarez López[1], Lic. Milagros de la Caridad Gómez Suárez[2],

1. Universidad de Matanzas – Filial Universitaria P. Betancourt,
Calle 29 e/ 18 y 20, Pedro Betancourt, Matanzas, Cuba.
julian.alvarez@umcc.cu

2. Universidad de Matanzas – Filial Universitaria P. Betancourt,
Calle 29 e/ 18 y 20, Pedro Betancourt, Matanzas, Cuba.
milagro.gomez@umcc.cu

CD de Monografías 2014

Resumen

Este artículo refleja la forma más eficaz y científica de impartir la trigonometría, como rama de las Matemáticas, en la enseñanza preuniversitaria. Se realiza un análisis de algunos métodos empleados con frecuencia que, aunque no dejan de resultar cómodos para los estudiantes, desvirtúan muchas veces la esencia de los contenidos. A partir de los conocimientos elementales sobre las relaciones trigonométricas que se establecen en el triángulo rectángulo, se aborda la forma de tratar aspectos básicos como la generalización del concepto de ángulo, los sistemas de medidas y los ángulos notables. Se introduce el concepto de funciones trigonométricas, sus valores, relaciones entre ellas y su aplicación al cálculo trigonométrico, identidades y ecuaciones, además de los gráficos que las representan.

***Palabras claves**: Seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante*

Introducción.

La enseñanza de la Trigonometría en el nivel preuniversitario resulta compleja por cuanto se trata de una rama de las Matemáticas que anteriormente solo se ha tratado en las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, lo cual generalmente se aborda de manera mecánica. Ya al adentrarse en estos contenidos, la primera novedad se encuentra en la generalización del concepto de ángulo, especialmente ángulos negativos y de más de una vuelta, sin olvidar el concepto de ángulos coterminales**.** En cuanto a los sistemas de medidas de ángulos, los estudiantes están acostumbrados al sexagesimal y el conocimiento del circular resulta también algo nuevo, máxime si se tiene en cuenta el conocimiento en cuanto al número irracional π. Del mismo modo, la introducción del círculo trigonométrico y los cuatro cuadrantes resulta a veces compleja, como lo es también el conocimiento de las funciones trigonométricas, los ángulos notables y en particular los signos en cada cuadrante y las fórmulas de reducción. Se observa como dificultad la identificación en el cálculo con ángulos en el sistema circular que no pertenecen al I cuadrante, para lo cual se proponen vías de solución. Finalmente, además de las identidades trigonométricas básicas, se mencionan los algoritmos para la demostración de identidades y la solución de ecuaciones trigonométricas, y los gráficos básicos de las mismas, en cuanto a propiedades y variaciones en amplitud, período y desplazamiento.

Desarrollo.

La enseñanza de la Trigonometría en Preuniversitario.

A lo largo de varias décadas de trabajo en la Enseñanza Media Superior, el autor ha podido constatar las deficiencias que confrontan los estudiantes en la aplicación de conceptos básicos de una rama de las Matemáticas que sin lugar a dudas presenta dificultades para el estudiantado: la Trigonometría. En muchas ocasiones estas dificultades están dadas en un enfoque incorrecto por parte de algunos profesores al no especificar cuáles conceptos resultan de vital importancia y concebir los contenidos desde un punto de vista totalmente memorístico. En el tratamiento de estas temáticas en el Preuniversitario, debe evitarse el uso de recursos que, a pesar de resultar a veces cómodos para los estudiantes, pueden conllevar a incorrecciones y falsos conceptos. Es importante que antes de abordar el estudio de las funciones trigonométricas se consoliden conocimientos que serán imprescindibles.

Inicialmente los estudiantes conocieron las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, lo cual no debe conllevar a dificultades, por cuanto conocen cuándo un triángulo es rectángulo y la nomenclatura para sus lados: catetos e hipotenusa. Las relaciones entre estos permiten conocer sus posibles valores, de manera que si en el numerador aparece un cateto y en el denominador la hipotenusa, es lógico que la fracción sea propia, mientras que si la relación se establece entre catetos no tiene por qué ser así. Se establecen entonces los cimientos para conocer posteriormente la imagen de las funciones trigonométricas. Los autores consideran además que en este momento es aconsejable introducir no solamente el seno, el coseno, la tangente y la cotangente, como usualmente se hace, sino también la cosecante y la secante, vistas respectivamente como recíproco de las dos primeras señaladas.

Ya al abordar específicamente la Trigonometría, aparecen conceptos que resultan nuevos para los estudiantes y que constituyen la base de los que vendrán más tarde. El primero de estos está basado en la ampliación del concepto de ángulo y los sistemas de medidas de ángulos. Generalmente se utiliza para determinar si un ángulo es positivo o negativo, la idea de comparación con el movimiento de las manecillas del reloj, éste recurso es aconsejable y de gran utilidad para los estudiantes, ahora bien, hay un concepto cuya comprensión es un poco más difícil, el de ángulo de más de una vuelta. Los estudiantes hasta ahora han tenido la concepción de que más allá de 360 grados no existen ángulos y se encuentran ahora con que el número de éstos es infinito, tanto en sentido positivo como negativo. Realmente es un concepto que si se transmite acertadamente, no debe llevar a confusiones o errores. Otro concepto estrechamente vinculado a los anteriores es el de ángulos coterminales. Algunos profesores consideran que ya en este momento debe introducirse la idea del círculo trigonométrico, pero no resulta imprescindible, ya que una simple circunferencia trazada en el pizarrón es suficiente para tratar estos aspectos.

En cuanto a los sistemas de medidas de ángulos, se presentan a veces situaciones que traen como resultado falsas concepciones. Los estudiantes conocen hasta ahora el grado como unidad de medidas y se encuentran con el radián, lo cual les resulta nuevo. El uso del símbolo π, que a partir de entonces aparecerá con frecuencia, en ocasiones conlleva a falsos conceptos. El estudiante conoce este símbolo como la relación entre el diámetro de una circunferencia y su longitud y ya con una idea concreta de los números reales, como un número irracional, constante y que por comodidad se trabaja con la cifra 3,14. Muchos profesores establecen una igualdad entre π y 180 grados que no es real, simplemente porque lo que existe es una equivalencia entre dos sistemas de medidas y no una igualdad numérica y esto debe especificarse bien desde un inicio. A pesar de que al aparecer más tarde los ángulos notables, que son los más usados, la memoria entra en juego y no es necesario siempre realizar la conversión de un sistema a otro. En estos inicios deben realizarse conversiones incluyendo todo tipo de ángulos, negativos, positivos y de más de una vuelta e incluso proceder en el caso de estos últimos a la obtención del ángulo coterminal correspondiente, cuya medida no exceda 360 grados. Igual se procederá con los ángulos negativos.

Ya al abordar las funciones trigonométricas como tales, se introduce el concepto de círculo trigonométrico, que a lo largo del tiempo ha tenido diversas denominaciones, tales como circunferencia típica, círculo típico y círculo unitario. Éste último, por razones de comodidad, resulta conveniente mencionarlo, incluso especificando que el radio no influye en los valores de las funciones trigonométricas, que no variarán en un círculo del tamaño de un centavo con respecto a otro con un diámetro equivalente al del planeta Tierra. Se aconseja al mismo tiempo, trasladar el ya conocido triángulo rectángulo al sistema de coordenadas. Con el conocimiento que los estudiantes poseen de sistemas de coordenadas cartesianas rectangulares, podrán realizar una comparación entre los catetos y el valor de las coordenadas del punto que generó el ángulo, la x como cateto adyacente, la y como cateto opuesto y el radio del círculo como la hipotenusa.

Se han creado ya las condiciones para el tratamiento de las funciones trigonométricas vistas en un sistema de coordenadas cartesianas y pueden entonces volver a establecerse las relaciones, ahora con las denominaciones de abscisa, ordenada y radio. Dado que el radio nunca se anulará pero las coordenadas sí en los ángulos axiales, la x en el eje y, mientras que la y en el eje x, se podrá observar claramente que seno y coseno nunca poseerán valores indefinidos pero sí la tangente y la cotangente. Es el momento de introducir también la secante y la cosecante, aunque de acuerdo a los programas no se manejen posteriormente. Se definirá así el dominio y la imagen de cada función trigonométrica y dado que se tuvo en cuenta considerar el radio unitario, será más fácil deducir los valores de seno y coseno siempre entre 0 y 1. Aunque en los inicios se mencione solamente ángulos del I cuadrante con lado inicial en el semieje positivo x, es el momento de introducir los conceptos de ángulos axiales y de los cuatro cuadrantes, lo cual facilitará, de acuerdo a las relaciones entre coordenadas y radio ya establecidas, determinar los signos en cada cuadrante. Es cierto que la coincidencia del signo positivo en funciones cuyo nombre comienza con la misma letra que el número ordinal que designa al cuadrante (seno-segundo, tangente-tercero y coseno-cuarto), constituye un recurso para su memorización, deben estar claros los motivos acorde al signo de la x o la y en cada semieje. La mayoría de los profesores hace uso de una frase para facilitar este proceso: “todos somos trabajadores cubanos”. El autor no se opone a esto siempre que se hayan abordado correctamente las deducciones ya mencionadas, pero sí a otras frases que denigran el proceso docente, como la escuchada en varias ocasiones: “todos suspendemos los Trabajos de Control”. Asimismo, puede procederse con ángulos de más de una vuelta y negativos.

Es el momento, si ya no se hizo de acuerdo a la creatividad del profesor, de introducir el concepto de ángulos notables, en primer lugar los axiales y luego los notables del primer cuadrante, que más tarde conllevarán a los de los cuadrantes restantes. Los valores de las funciones trigonométricas se pueden deducir con facilidad sin necesidad de memorizarlos para los ángulos axiales, pero en el caso de 30, 45 y 60 grados, la deducción es un poco más compleja. Aunque finalmente el estudiante los memorice a través de una tabla, es conveniente al menos una vez, dar a conocer por qué esos son los valores, lo cual no resulta difícil.

Ahora bien, al tratar los ángulos notables de los cuadrantes II, III y IV, surgen algunos problemas. En caso de utilizar el sistema sexagesimal, resulta fácil si ya se conocen como ángulos axiales los de 0, 90, 180, 270 y 360 grados, ubicar en el cuadrante correspondiente un ángulo, aunque sea negativo o de más de una vuelta, no así para ángulos medidos en radianes. Existe la posibilidad de memorizarlos, lo cual es válido, pero otros tipos de procedimientos también son válidos. De entrada, la fracción que precede al ángulo es primordial, ya que si es propia tiene que pertenecer al II o I cuadrantes, mientras que si es impropia pertenecerá a uno de los restantes. Muchos han sido los métodos empleados, que en determinado momento pueden ayudar al estudiante, pero desvirtúan el contenido y a veces hacen caer en errores conceptuales, tal es el caso de sustituir π por 180 grados y considerar entonces al ángulo en el sistema sexagesimal, lo que conlleva como ya se dijo a igualar dos números que en realidad no lo son y en otros casos a llevar a decimal la fracción que precede al ángulo, trasladando luego a un sistema dividido en 0,5 unidades a partir de cada semieje, que no deja de ser novedoso pero no responde a la esencia de estos contenidos. Existe algo que no puede obviarse y que ayuda a los estudiantes y es el hecho de que los ángulos notables de los diferentes cuadrantes, en el sistema circular, siempre tendrán como denominador los dígitos 6, 4 o 3, permitiendo la referencia a los tres ángulos notables del I cuadrante, $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$, respectivamente 30, 45 y 60 grados.

En caso de ángulos no notables, siempre es conveniente abordarlos, aunque no se trabaje directamente con tablas durante las evaluaciones por diversas razones obvias. El profesor en caso de no poseer tablas para los estudiantes, debe al menos referirse a su manejo y proceder a su utilización con la correspondiente explicación.

Llegado el momento de aplicar las fórmulas de reducción, hay que tener en cuenta las correspondientes a las llamadas fórmulas de las cofunciones en el I cuadrante y proceder a la explicación del por qué para el II se utiliza π -x, en el III π +x y en el IV 2 π -x o -x y asimismo, trabajar estas fórmulas para ángulos negativos y mediante la correspondiente reducción a una vuelta en el caso de ángulos de más de una. El estudiante, en caso de tener que obtener el ángulo ya sabiendo en qué cuadrante se encuentra, razona lo que debe hacer con la correspondiente fórmula, para ángulos notables utilizando como referencia los del I cuadrante, π /6, π /4 y π /3. Esto, por su puesto, se observa con mayor frecuencia cuando más tarde se trabajan las ecuaciones trigonométricas, al determinar el conjunto solución, con lo cual se evitaría memorizar todos los ángulos notables en los cuatro cuadrantes.

Las identidades trigonométricas básicas pueden memorizarse sin dificultades, se recomienda manejar al menos algunas veces la secante y la cosecante, como respectivos recíprocos del coseno y el seno. Una identidad muy utilizada, $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, debe ser despejada para ir familiarizando a los estudiantes con vista en un futuro a las ecuaciones, en $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$. Las fórmulas para ángulos múltiplos pueden también memorizarse, pero siempre viendo su utilidad para ángulos que se puedan convertir en suma, resta, duplo o mitad de ángulos notables.

Las identidades requieren de inicio una serie de normas que se tendrán en cuenta para agilizar el trabajo y evitar que conlleven a confusiones por el paso de un miembro a otro indiscriminadamente. En cuanto a los valores inadmisibles de la variable, aunque en épocas anteriores se exigía plantearlos por parte del estudiante, el autor considera que esto no es necesario, pero sí al menos que aparezcan en el texto del ejercicio.

Ya para las ecuaciones, el trabajo resulta un poco más complejo, principalmente en la determinación del conjunto solución. Es obvio que tanto en identidades como en ecuaciones se necesita el dominio del tecnicismo algebraico y como es lógico, dominar los elementos básicos a los que ya se hizo alusión. Es muy importante que en caso de limitarse la solución a un intervalo la respuesta se corresponda con el sistema utilizado al plantear esta restricción. Finalmente hay que decir que si no existen estas limitaciones iniciales, la respuesta debe incluir siempre al conjunto de ángulos coterminales, con la correcta interpretación de por qué se utiliza $+2k\ \pi$ en el sistema circular y +360 grados k en el sexagesimal.

Finalmente, el autor se refiere a los gráficos de las funciones trigonométricas, al menos la sinusoide, la cosinusoide, la tangentoide y la cotangentoide. No es necesario entrar en la secantoide y la cosecantoide. Estos gráficos deben introducirse, de modo que elementos como dominio, imagen, monotonía, periodicidad (para lo cual la gráfica no se limitará solamente a una vuelta) y signos en cada cuadrante puedan deducirse de la gráfica. Hace años se trabajaba una unidad con el título Tópicos Relativos a la Periodicidad, que abordaba cuestiones como amplitud, desplazamiento o desfasaje y variación en el período principal. Esto debe mantenerse como se trabaja actualmente.

La temática tratada ofrece pautas a seguir para el tratamiento de la Trigonometría en la enseñanza preuniversitaria actual, que ha confrontado diversas dificultades, a veces por desconocimiento de los profesores o por querer facilitar tanto al estudiante, que se pierde la esencia de los contenidos.

Conclusiones.

Luego de efectuar el análisis acerca de la forma de abordar la Trigonometría en la enseñanza preuniversitaria, se concluye determinando que no siempre los conceptos se transmiten de manera científica y en muchas ocasiones se aplican métodos facilistas para lograr de manera mecánica resolver las situaciones propuestas. Asimismo, se imparten algunas cuestiones de forma muy somera, sin llegar a la esencia del contenido como tal. Teniendo en cuenta la aplicación de estos contenidos en la propia disciplina Matemática en estudios superiores y su vínculo con otras disciplinas como la Física, se sugiere prestar atención a las sugerencias planteadas, para lograr así una comprensión con mayor rigor científico y facilitar el trabajo en las aulas de la enseñanza preuniversitaria.

Bibliografía

COLECTIVO DE AUTORES. *Matemática 11no grado.* Editorial Pueblo y Educación. 2002

COLECTIVO DE AUTORES. *Matemática 12mo grado. Parte 2. Sistematización.* Editorial Pueblo y Educación. 2009

PAZ SORDÍA, A. *Trigonometría. Matemática.* Cuarto Curso.

SHARP JR., H. *Elementos de trigonometría plana.* Editorial Pueblo y Educación. Instituto Cubano del Libro. 1976