SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA EL TRABAJO CON LAS ECUACIONES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PREUNIVERSITARIO

MSc. Rubén Collado Martínez[1]

1.- *Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Vía Blanca Km.3, Matanzas, Cuba.*

Resumen

El presente trabajo aborda los elementos fundamentales sobre los desafíos en la enseñanza de la Trigonometría relacionado con la resolución de ecuaciones y la demostración de identidades en el onceno grado de la enseñanza preuniversitaria. En este se exponen sugerencias metodológicas para el tratamiento de este contenido que a criterio del autor contribuye al desarrollo de habilidades en la resolución de ecuaciones y la demostración de identidades trigonométricas.

***Palabras claves**: Ecuaciones; identidades; sugerencias metodológicas; habilidades.*

Introducción

Hace varios años los resultados de la promoción de la prueba de ingreso en la asignatura Matemática no han sido buenos, en los cuales ha influido los obtenidos por los estudiantes en la pregunta relacionada con la Trigonometría. Teniendo en cuenta los mismos, el autor de este trabajo propone sugerencias metodológicas para el trabajo en la resolución de ecuaciones y la demostración de identidades en la unidad de trigonometría en la enseñanza preuniversitaria en el grado undécimo, por lo que consideramos que se debe sistematizar la resolución de ecuaciones y la demostración de identidades sencillas antes de pasar a la demostración de identidades y la resolución de ecuaciones que requieren transformaciones o u otras habilidades adquiridas en otros contenidos precedentes.

En la prueba aplicada en el curso 2012 – 2013 se evidenciaron los resultados anteriormente comentados pues la pregunta de mayor incidencia en los resultados a nivel nacional fue la pregunta de trigonometría que gran cantidad de estudiantes no obtenían ni el 30 % de la puntuación de la pregunta.

Desarrollo

Desde los primeros grados en la escuela primaria los educandos reciben Matemática, debiendo adquirir una sólida preparación en estos contenidos, los que se deben abordar siempre con la independencia cognoscitiva.

En la enseñanza secundaria los estudiantes continúan el aprendizaje de la asignatura en cuestión, lo cual los pone en condiciones favorables para recibir los contenidos que sobre trigonometría podrán asimilar en la enseñanza Preuniversitaria. En los últimos años en el programa de noveno grado está incluido el contenido relacionado con las razones trigonométricas de ángulos agudos de triángulos rectángulos; los alumnos de noveno grado reciben las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, y resuelven ejercicios formales y problemas sencillos de la vida práctica utilizando dichas razones.

En el onceno grado de la enseñanza preuniversitaria está incluida en el programa de Matemática la unidad de Trigonometría, la cual comienza con un repaso de las razones trigonométricas de ángulos agudos de triángulos rectángulos y termina con lo aplicación de los contenidos en la resolución de triángulos no rectángulo y el cálculo en las figuras planas y polígonos. A continuación aparece el esquema de la unidad objeto de estudio en este trabajo:

UNIDAD #2 ECUACIONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS ------50 h/c

Repaso de las razones trigonométricas
Ejercicios sobre triángulos rectángulos
Ejercicios sobre las razones trigonométricas y triángulo rectángulo
Ejercicios sobre razones trigonométricas
Sistema circular de medida de ángulos
Círculo trigonométrico
Fórmulas de reducción
Ejercicios sobre calculo trigonométrico
Ejercitación.
Generalización del concepto ángulo.
Ejercitación.
Ejercitación.
Ecuaciones trigonométricas sencillas.
Ejercitación sobre ecuaciones trigonométricas.
Identidades trigonométricas fundamentales.
Ejercicios sobre demostración de identidades.
Ejercicios sobre demostración de identidades.
Resolución de ecuaciones trigonométricas utilizando identidades.
Resolución de ecuaciones trigonométricas utilizando identidades.
Sistematización.
Sistematización.
Sistematización.
Primer trabajo de control parcial.
Revisión y discusión de los objetivos evaluados trabajo de control.
Formulas de adición.
Formulas del ángulo duplo.
Demostración de identidades.
Ejercicios de demostración de identidades.
Ejercicios.
Ejercicios, solución ecuaciones trigonométricas, Utilizando identidades.
Ejercicios, solución ecuaciones trigonométricas, Utilizando identidades.
Ejercicios, solución ecuaciones trigonométricas, Utilizando identidades.
Ejercicios, solución ecuaciones trigonométricas, Utilizando identidades.
La función Y=sen x .Gráfico y propiedades.
La función Y=cos x .Gráfico y propiedades.
La función Y=a sen (bx +c) , Y=a cos (bx+c).Gráfico y propiedades.
La función Y=tan x , Y=cot x .Gráfico y propiedades.

Ejercicios sobre funciones trigonométricas.
Ejercicios sobre funciones trigonométricas.
Ejercicios sobre funciones trigonométricas.
Problemas que conducen a la resolución de triángulos rectángulos.
Ley de los senos. Ejercicios.
Ejercicios sobre ley de los senos.
Ley de los cosenos. Ejercicios.
Ejercicios sobre ley de los cosenos.
Ejercicios sobre ley de los senos y cosenos.
Ejercicios sobre ley de los senos y cosenos.
Ejercicios sobre ley de los senos y cosenos.
Áreas de triángulos cualesquiera.
Polígonos regulares.
Polígonos regulares. Ejercicios.
Aplicación de la trigonometría.
Aplicación de la trigonometría.
Aplicación de la trigonometría.
Aplicación de la trigonometría.

Con la aplicación de esta distribución de la unidad en cuestión el autor ha observado y comprobado que los resultados del ingreso a la educación superior no han sido los mejores y los estudiantes en la pregunta de trigonometría han tenido muchas dificultades sobre todo en la determinación de las soluciones de las ecuaciones trigonométricas después que obtienen las ecuaciones sencillas, por ejemplo sen x = a ($a \in R$) ya que no buscan las soluciones en todos los cuadrantes y además si tienen el dominio limitado también presentan problemas para enmarcar las soluciones en dicho dominio de definición de la ecuación y en la demostración de identidades de ahí que hemos analizado que se pueden hacer sugerencias metodológicas para el trabajo en esta unidad en lo referente a la resolución de ecuaciones trigonométricas partiendo de que en la unidad se puede hacer más énfasis en la resolución de ecuaciones sencillas para que los alumnos desarrollen la habilidad de determinar las soluciones de ecuaciones sencillas para estar preparados para la determinación de los valores que solucionan las ecuaciones de la forma sen x = a, cos x = a, tan x = a con dominio R o con el dominio limitado a un subconjunto de R.

Es decir que hay que trabajar más con las ecuaciones sencillas antes de resolver ecuaciones que conlleven a la transformación de las ecuaciones con mayor grado de dificultad utilizando las identidades para su transformación hasta llegar a las ecuaciones sencillas.

Estos resultados están abalados por los resultados obtenidos en los muestreos a las pruebas que hemos visto que los estudiantes hacen las transformaciones algebraicas hasta obtener las ecuaciones sencillas de la forma mencionadas anteriormente pero fallan en la solución de estas.

Para el trabajo con las identidades se recomienda la utilización de las tres formas posibles para demostrar identidades cualesquiera y en particular las trigonométricas.

A continuación el autor hace referencia a las tres formas que se pueden utilizar para demostrar las identidades:
1era forma: Tomar el miembro que te ofrece mayor posibilidad de trabajo y transformar hasta obtener el otro miembro.
2da forma: Tomar los dos miembros hasta obtener una misma igualdad con los miembros iguales.
3ra forma: Puedes trasponer términos de un miembro a otro para obtener otra identidad y luego demuestras la identidad que se obtuvo.
Tenga en cuenta que en muchas ocasiones debes utilizar algunos artificios matemáticos que le permitirán obtener un miembro partiendo del otro.

Ejemplo resuelto mostrando las tres formas:

Ejemplo: Demuestre la siguiente identidad para los valores admisibles de la variable.

$$\frac{sen2x}{2-2sen^2x}+\cot x=\frac{2}{sen2x}$$

1era Forma: Tomando el MI para obtener el MD.

$$MI=\frac{\operatorname{sen}2x}{2-2\operatorname{sen}^2 x}+\cot x=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{2(1-\operatorname{sen}^2 x)}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$$

$$=\frac{senx}{\cos x}+\frac{\cos x}{senx}=\frac{sen^2x+\cos^2 x}{senx\cos x}=\frac{1}{senx\cos x}*\frac{2}{2}=\frac{2}{2senx\cos x}=\frac{2}{sen2x}$$

MI = MD

2da Forma: Transformando los dos miembros:

$$MI=\frac{sen2x}{2-2sen^2x}+\cot x=\frac{2senx\cos x}{2(1-sen^2x)}+\frac{\cos x}{senx}=\frac{senx\cos x}{\cos^2 x}+\frac{\cos x}{senx}=\frac{senx}{\cos x}+\frac{\cos x}{senx}$$

$$=\frac{sen^2x+\cos^2 x}{senx\cos x}=\frac{1}{senx\cos x}$$

$$MD=\frac{2}{sen2x}=\frac{2}{2senx\cos x}=\frac{1}{senx\cos x}$$

MI = MD

3era Forma: Transformando la identidad dada en una nueva identidad.

$$\frac{sen2x}{2-2sen^2x}=\frac{2}{sen2x}-\cot x$$

$$MI=\frac{sen2x}{2-2sen^2x}=\frac{2senx\cos x}{2(1-sen^2x)}=\frac{senx\cos x}{\cos^2 x}=\frac{senx}{\cos x}=\tan x$$

$$MD=\frac{2}{sen2x}-\cot x=\frac{2}{2senx\cos x}-\frac{\cos x}{senx}=\frac{1}{senx\cos x}-\frac{\cos x}{senx}=\frac{1-\cos^2 x}{senx\cos x}=\frac{sen^2x}{senx\cos x}$$

$$=\frac{senx}{\cos x}=\tan x$$

MI = MD

Ejercicios de demostración de identidades que se pueden resolver para desarrollar la habilidad de demostración de identidades:

a) $\frac{\cos\alpha}{1+sen\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1-sen\alpha}$

b) $\frac{2\cos^2 x}{sen^2 x}+\tan x=\frac{2}{sen2x}$

c) $\frac{2sen^2 x}{\cot x}+sen2x=2\tan x$

d) $\tan x sen2x+senx\cos x\cot x=2-\cos^2 x$

e) $(1-2sen^2 x)(1+\cot^2 x)=\cot^2 x-1$

f) $sen(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos x$

g) $\frac{sen(\pi-\beta)}{1+\cos(2\pi-\beta)}-\cot(\pi-\beta)=\frac{1}{sen\beta}$ $\quad(0<\beta<\pi/2)$

h) $\frac{2\cos^2 x-1+sen2x\cot x}{1-sen^2 x}=3-\tan^2 x$

i) $sen(\frac{\pi}{2}-x)*sen(\pi+x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)*\cos(2\pi-x)=0$ $\quad(0<x<\pi/2)$

Otros ejercicios que le permitirán desarrollar más habilidades en la demostración de identidades.

1) Sean las expresiones

$P=sen^2(A+1)x+\cos^2(\frac{6x}{A})$ y $Q=\tan x-\cot x+\frac{2-4sen^2 x}{sen2x}+1$

a) Determine los valores admisibles de la x є R en Q.
b) Prueba que para todo valor de x del dominio de Q se cumple que P = Q siendo A=2

2) Dadas las funciones:

$f(x)=\frac{sen2x}{1-\cos x}*\frac{1+\cos x}{\cos x}$ y $\frac{2(1+\cos x)^2}{senx}$

a) Determine los valores admisibles de la variable en cada función.
b) Demuestre que f(x) = g(x) para los valores admisibles de f y g.

3) Demuestre la siguiente identidad para los valores admisibles de x.

$(1-\tan^2 x)(1-sen^2 x)=(1-\sqrt{2}senx)(1+\sqrt{2}senx)$

Después que el docente compruebe que los estudiantes no presentan dificultades en la resolución de ecuaciones sencillas del tipo mencionado anteriormente entonces se pasa a la resolución de otras ecuaciones que requieren transformaciones

Para la resolución de ecuaciones proponemos el siguiente algoritmo de trabajo:

- Trate de expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación en función de una sola, sí es posible.
- Cerciórese que las funciones trigonométricas que poseen la ecuación sólo aparece el mismo argumento, sí no es así utilice identidades.
- Aplique algunas trasformaciones equivalentes para obtener ecuaciones sencillas del tipo: $\mathrm{senx} = \mathrm{a}$ ó $\mathrm{cosx} = \mathrm{a}$ ó $\mathrm{tanx} = \mathrm{a}$ ó $\mathrm{cotx} = \mathrm{a}$
- Determine las soluciones en cada coso.
- Haga la comprobación sí ha utilizado alguna transformación no equivalente.
- Escriba el conjunto solución.

Ejemplos resueltos de ecuaciones trigonométricas:

1) Resuelva la siguiente ecuación:

$$senx - senx.\cos x = 0 \begin{cases} \text{En este caso no puedo expreserlo} \\ \text{en una sola función, luego factorizaremos.} \end{cases}$$

$$senx\,(1 - \cos x) = 0$$

$$senx = 0 \qquad 1 - \mathrm{cosx} = 0$$

$$x = K\pi \qquad -\mathrm{cosx} = -1$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2K\pi, K \in \mathrm{Z}$$

No siempre es posible expresar la solución simplificada como se hizo en este caso, si lo deseas.
La puedes poner en la siguiente forma:

$$S = \{x \in \Re : x = k\pi \text{ ó } x = 2k\pi,\ k \in \mathrm{Z}\}$$

2) Halle las soluciones de la ecuación:

$$\cos x - sen^2 x = 1$$

Como en este caso aparecen dos soluciones trigonométricas diferentes vamos a transformar para expresar en términos de una sola, aplicaremos identidades sencillas.

$$\cos x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 1$$

$$\cos x - 1 + \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

$$(\cos x + 2)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x + 2 = 0 \qquad \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = -2 \qquad \cos x = 1$$

La ecuación $\cos x = -2$ no tiene soluciones porque la imagen de seno esta entre –1 y 1, luego las soluciones salen de la ecuación $\cos x = 1$.

$$Luego : x = 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$$

$$S = \{x \in \Re : x = 2k\pi, k \in \mathrm{Z}\}$$

3) Resuelve:

$senx + \cos x = 1$

En este caso no encontramos manera de expresar una función en función de la otra luego hay que hacer otras transformaciones:

$$senx = 1 - \cos x \begin{cases} Elevemos\ al\ cuadrado\ ambos\ mienbros \\ para\ tener\ los\ cuadrados\ de\ seno\ y\ \cos e\ para \\ luego\ utilizar\ identidades. \end{cases}$$

$$sen^2 x = (1 - \cos x)^2$$

$$sen^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$-2\cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$2\cos x\ (\cos x - 1 =) = 0$$

$$2\cos x = 0 \qquad ó \qquad \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \qquad\qquad \cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad\qquad x = 2k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Como elevamos al cuadrado que no es una transformación equivalente debemos comprobar, luego tomaremos valor de cada caso.

$$Para\ x = \frac{\pi}{2} \qquad MI = sen\frac{\pi}{2} \quad = 1$$

$$MD = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1 \qquad MI = MD$$

$$S = \left\{ x \in \Re : x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ó \quad x = 2k\pi, k \in \pi \right\}$$

4) Resuelve:

$\cos 2x - senx = 0$

En este caso observe que tenemos funciones distintas y argumentos distintos luego hoy que hacer transformación, sustituyamos cos 2x por su identidad.

$$1 - 2\ sen^2 x - senx = 0$$

Ahora tenemos una sola función y con el mismo argumento luego podemos transformar:

$$-2sen^2 x - senx + 1 = 0$$

$$2sen^2 x + senx - 1 = 0$$

$$(2senx - 1)(senx + 1) = 0$$

$$2senx - 1 = 0 \qquad senx + 1 = 0$$

$$2senx = 1 \qquad senx = -1$$

$senx = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{3\pi}{2}$.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Como el seno es positivo en I y II cuadrante hay que buscar las soluciones de II cuadrante, aplique fórmula de reducción.

$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $\quad S = \left\{ x \in \Re : x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ ó \ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ó \ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \pi \right\}$

5) Halle las soluciones de:

$sen^2 x - senx - 1 = 0$

Hacemos un cambio de variable:

$y^2 - y - 1 = 0$ $\qquad a = 1$

$D = b^2 - 4ac$ $\qquad b = -1$

$D = (-1) - 4(1)(-1)$ $\qquad c = -1$

$D = 1 + 4 = 5$

En este caso al misma función y el mismo argumento y como es una ecuación cuadrática que no tiene descomposición factorial para obtener fácil las soluciones aplicamos la fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas:

Recuerda que: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad donde \quad D = b^2 - 4ac$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad luego \quad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

es decir que:

$senx = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $\qquad senx = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$senx = 1{,}618$ $\qquad senx = -0{,}618$

Esta no tiene solución ya que: $-1 \leq senx \leq 1$

Como el seno es negativo en III y IV cuadrante se busca previamente el valor de $senx = 0{,}618$ es un ángulo de referencia del primer cuadrante, para luego aplicar fórmulas de reducción.

A. Referencia $x = 38{,}2^\circ$

Luego: $IIIc : x = 218{,}2^\circ + k * 360^\circ \quad k \in \pi$

$IIIc : x = 321{,}8^\circ + k * 360^\circ \quad k \in \pi$

La solución será: $S = \{x = 218{,}2^\circ + k{,}360^\circ \quad ó \quad x = 321{,}8^\circ + k * 360^\circ, k \in \pi\}$

6) Resuelve:

$sen2x = senx$

En este caso es fácil ver que se puede sustituir $sen2x$:

$2senx\cos x = senx$

Mucho cuidado con este tipo de ecuación porque se te puede ocurrir pasar el $senx$ del primer miembro dividiendo al segundo miembro pero si lo haces, considera que $senx \neq 0$ y después que analizar que ocurre si $senx = 0$ entonces tienes que comprobar con las soluciones de $senx = 0$,a continuación te mostramos este proceso:

$2senx\cos x = senx$

$2\cos x = \frac{senx}{senx}$

$2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$Ic \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$IVc \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

Ahora hay que considerar $senx = 0$, buscar las soluciones y comprobar:

$senx = 0$

$x = k\pi$

Comprobamos para un elemento de esa solución:

$sen2x = senx$

$MI = sen2x = sen2(0) = sen0 = 0$

$MD = senx = sen = 0 = 0$

$MI = MD$

$S = \left\{ x \in \Re : x = k\pi \quad ó \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ó \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \pi \right\}$

Propuesta de ejercicios para desarrollar la habilidad en la resolución de ecuaciones:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $9senx - 5senx - 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
2. $9senx = 6\cos^2 x$
3. $2\cos 2x + 1 = -senx$
4. $2sen^3 x - 2sen^2 x = \sqrt{2}(sen^2 x - senx)$
5. $2\cos^2 x + senx = \cos 0 \qquad x \in [0;2\pi]$
6. $\frac{5 - 5\cos^2 x}{senx - 3} + 4senx = 6sen^2 x \qquad x \in [0;2\pi]$

Otros ejercicios sobre ecuaciones que presentan un mayor grado de dificultad.

1.- Halle los ceros de $f(x) = 2\cos^2 x - 3senx - 3 \quad en \quad [0;2\pi]$

Determine los puntos donde se cortan f y g en el intervalo $[0;2\pi]$ si $f(x)=sen^2x\cos x+\cos x$ y $g(x)=\cos^2 x$

2.- Determine los valores de x de los puntos donde la función $f(x)=\cos 2x+5\cos x-2$ corta al eje de las x.

3.- Halle los valores de $x\in[0;2\pi]$ que anulan la función $g(x)=\sqrt{\cos^2 x+1}+sen2x-2$

4.- Sean las funciones $f(x)=9^{senx-1}-3^{senx-1}$ y $g(x)=3^{senx}-3$ determine las abscisas de los puntos en que las funciones f y g alcanzan el mismo valor.

Conclusiones.

- Sistematizar el trabajo en la demostración de identidades y la resolución de ecuaciones sencillas antes de pasar a la resolución de ejercicios integradores.
- Aplicar estas sugerencias en la enseñanza preuniversitaria en el onceno grado de la enseñanza preuniversitaria y en la preparación de ingreso a la Universidad en las Facultades obreras y campesinas. .

Bibliografía

Ministerio de Educación, Programas. Décimo Grado y Primer Año de la Educación Técnica y Profesional, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2005.

Matemática, Décimo grado. Colectivo de autores, Ed, Pueblo y Educación, 1990

Ejercicios complementarios de Matemática, para la preparación en la enseñanza de la Matemática, Jacinto Hernández Avalos, Ed, Pueblo y Educación, 1998

Preparación con vistas al ingreso as la Educación Superior, Material complementario II. Ed, Pueblo y Educación, 2011

Materiales digitalizados del Mined para la segunda prueba de ingreso 2010,