ANÁLISIS DE ECUACIONES DE PROYECTILES PARA EL PERFECCIONAMIENTO DE LANZAMIENTOS EN LA PREPARACIÓN PARA LA DEFENSA.

MSc. Frank Jesús Sanabria Cordoves [1], Ing. Ángel Luis Zuriarraín Sosa [2]

1. Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos, Km 3 ½ carretera Varadero, Matanzas, Cuba.

2. Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos, Km 3 ½ carretera Varadero, Matanzas, Cuba.

Resumen.

El estudio del lanzamiento de proyectiles como contenido dentro del estudio de la Física ofrece grandes aportes a la preparación para la Defensa. El análisis de ecuaciones que describen el movimiento de proyectiles, se convierte en una herramienta eficaz para la predicción de disparos de artillería. Para tal logro se realizó un estudio de variantes en el lanzamiento de proyectiles atendiendo a las características del medio en que el proyectil realizará su vuelo. La confección de un software facilita y agiliza los cálculos del ángulo necesario para impactar un objetivo determinado así como ilustra la trayectoria del proyectil, aportando relevante información que puede ser utilizada por los operadores de la artillería en el badeo de obstáculos y precisión del tiro.

Palabras claves*: Proyectiles, tiro parabólico, simulación.*

Introducción.

Desde el triunfo de la Revolución Cubana, la formación del nivel superior ha reclamado y hecho realidad su participación activa en las tareas de la defensa.

En función de favorecer ese empeño, el Partido, el Gobierno y las Fuerzas Armadas Revolucionarias han adoptado, en cada momento, decisiones encaminadas a satisfacer las aspiraciones de los estudiantes de la Educación Superior, definiendo los objetivos, formas y métodos de la preparación militar, sobre la base de los intereses de la defensa.

La preparación militar con carácter curricular de los estudiantes universitarios se inició en septiembre de 1975, al firmarse el convenio entre el MINFAR y el MINED, dando cumplimiento a uno de los acuerdos del Congreso Nacional de Educación y Cultura, para lo cual se creó el órgano de preparación militar en la Universidad de La Habana, que garantizó el cumplimiento del programa de preparación militar concebido para esta primera fase, surgiendo en el curso 1975-1976 las Cátedras Militares en los centros de Educación Superior del país.

El análisis de este proceso condujo a la aprobación de la Directiva 29 del Ministro de las FAR, en la que se plantea perfeccionar el sistema de preparación para la defensa de los estudiantes universitarios de los centros de educación superior, lo que dio origen a la disciplina Preparación para la Defensa, con una proyección más específica, vinculada con las exigencias del futuro desempeño de los egresados de la educación superior y sus responsabilidades y acciones concretas en relación con la defensa.

Las criterios en torno a esta vinculación pretenden que la formación de esta arista no se limite a prepara a nuestros estudiantes desde el plano teórico militar sino que permita aprender desde cada una de las materias a contribuir al primer llamado de cada ciudadano en aras de la defensa por nuestra soberanía

La Física, impartida en todas las carreras de ingenierías de la educación superior se centra en el estudio de las propiedades y el comportamiento de la energía y la materia tal como cualquier cambio en ella que no altere la naturaleza de la misma, así como al tiempo, el espacio y las interacciones de estos cuatro conceptos entre sí.

Es una de las más antiguas disciplinas académicas, tal vez la más antigua, significativa e influyente, no sólo debido a que los avances en la comprensión a menudo se han traducido en nuevas tecnologías, sino también a que las nuevas ideas en la física resuenan con las demás ciencias, las matemáticas y la filosofía.

La Física no es sólo una ciencia teórica; es también una ciencia experimental. Como toda ciencia, busca que sus conclusiones puedan ser verificables mediante experimentos y que la teoría pueda realizar predicciones de experimentos futuros. De tal razonamiento deriva la amplitud de su campo de estudio, así como su desarrollo histórico en relación a otras ciencias.

La física, en su intento de describir los fenómenos naturales con exactitud y veracidad, permite perfeccionar e incidir en otras áreas con puntos de contacto. La defensa militar no escapa a esta relación y su aprovechamiento pudiera solucionar hoy una problemática práctica de la artillería militar.

Las ecuaciones en la materia de proyectiles son una herramienta para aminorar la problemática de la inexactitud en el tiro con armamento militar. Su fallo implica no solo un gasto económico sino además la pérdida de una oportunidad de defender con mayor efectividad en el campo una posición militar que tributa a una victoria ante un ataque militar.

Tal problemática desencadena que se proyecte como objetivo de este trabajo, en franca expresión de la relación de la Física con la preparación para la Defensa, el análisis de ecuaciones de proyectiles para el perfeccionamiento de lanzamientos en la preparación para la defensa en el país.

1. Tiro parabólico sin rozamiento.

Un proyectil es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos proyectiles. El camino que sigue un proyectil es su trayectoria. (Brancazio, 1997)

Para analizar este tipo de movimiento tan común, partiremos de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración (debida a la gravedad) constante tanto en magnitud como en dirección. Despreciaremos los efectos de la resistencia del aire, así como la curvatura y rotación terrestres. Como todos los modelos, éste tiene limitaciones. La curvatura de la Tierra debe considerarse en el vuelo de misiles de largo alcance.

El movimiento de un proyectil siempre está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial . La razón es que la aceleración debida a la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede mover un proyectil lateralmente. Por lo tanto, este movimiento es bidimensional. Llamaremos al plano de movimiento, el plano de coordenadas ***xy***, con el eje ***x*** horizontal y el eje ***y*** vertical hacia arriba.

La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que podemos tratar por separado las coordenadas ***x*** e ***y***. La componente ***x*** de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a -***g***. (Por definición, ***g*** siempre es positiva, pero por las direcciones de coordenadas elegidas, ***ay*** es negativa.) Así, podemos analizar movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante. (Erlichson, 1983)

Podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales:

$$v_x = v_{0x}$$
$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales.

Si se desprecia la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.

En la cima de la trayectoria, el proyectil tiene velocidad vertical cero (***Vy*** = 0), pero su aceleración vertical aun es ***-g***. Verticalmente, el proyectil muestra movimiento con aceleración constante en respuesta al tirón gravitacional.

Horizontalmente, el proyectil muestra movimiento de velocidad constante: su aceleración horizontal es cero, por lo que se mueve a distancias ***x*** iguales en intervalos de tiempo iguales.

En cualquier instante, la distancia ***r*** del proyectil al origen (la magnitud del vector de posición está dada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

La dirección de la velocidad, en términos del ángulo a que forma con el eje ***x***, está dada por:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

El vector de velocidad ***v*** es tangente a la trayectoria en todos los puntos. Podemos deducir una ecuación para la forma de la trayectoria en términos de ***x*** e ***y*** eliminando ***t***:

$$y = (\tan \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$$

Cuando la resistencia del aire no es insignificante y debe incluirse, calcular la trayectoria se vuelve mucho más complicado; los efectos de dicha resistencia dependen de la velocidad, por lo que la aceleración ya no es constante.

2. Tiro parabólico con rozamiento.

En el epígrafe anterior se ha analizado el caso del lanzamiento de proyectiles despreciando el efecto que provoca el rozamiento del aire con el proyectil. En este caso aplicaremos dos modelos de fuerza para describir la resistencia que opone el medio al movimiento del cuerpo.

Una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad y una fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad.

2.1. Fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad.

Si despreciamos el empuje, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa ***m*** son: El peso ***mg*** y la fuerza de rozamiento ***Fr***, que es sentido contrario al vector velocidad (tangente a la trayectoria). ***Fr = -mbv***. (Warburton R. D. H., 2004)

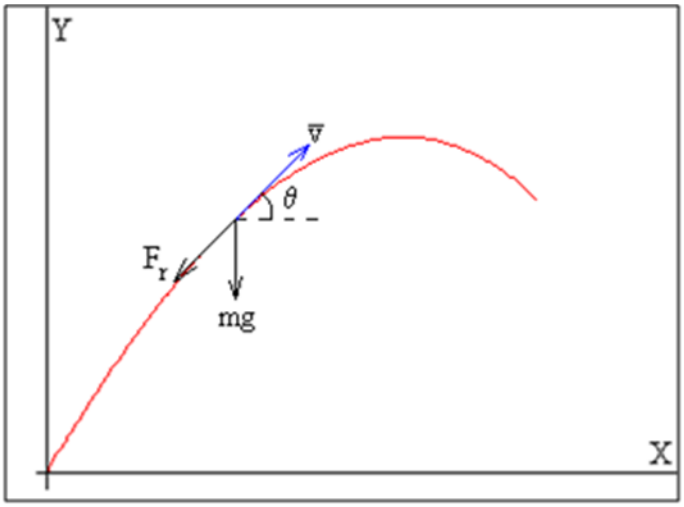

Figura 1. Tiro parabólico con fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad.

Las ecuaciones del movimiento del cuerpo serán por tanto:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -mbv_x$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - mbv_y$$

La solución de estas ecuaciones con las condiciones iniciales ***t=0, Vx=Vox, Vy=Voy***, son:

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}\exp(-bt)$$
$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{g}{b} + v_{0y}\right)\exp(-bt) - \frac{g}{b}$$

Integrando nuevamente, con las condiciones iniciales ***t=0, x=0, y=0***, tenemos:

$$x = \frac{v_{0x}}{b}\left(1 - \exp\left(-bt\right)\right)$$
$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{g}{b} + v_{0y}\right)\left(1 - \exp\left(-bt\right)\right) - \frac{g}{b}t$$

Para un proyectil disparado con velocidad ***Vo*** y ángulo de tiro ***q***. Las velocidades iniciales se calculan hallando las componentes mediante razones trigonométricas.

2.1.1. Alcance del proyectil, altura máxima y tiempo de vuelo.

El proyectil llega al suelo ***y=0***, a una distancia ***x=R*** del origen. **R** se denomina alcance del proyectil.

En la primera ecuación sustituimos ***x=R*** y despejamos el tiempo de vuelo ***t***:

$$t = -\frac{1}{b}\ln\left(1 - \frac{Rb}{v_{0x}}\right)$$

Sustituyendo el tiempo y haciendo ***y=0*** se tiene:

$$\left(\frac{g}{b} + v_{0y}\right)\frac{R}{v_{0x}} + \frac{g}{b^2}\ln\left(1 - \frac{Rb}{v_{0x}}\right) = 0$$

Una ecuación trascendente en ***R***, que se resolverá por procedimientos numéricos.

La altura máxima, como ***vy=dy/dt=0***, despejamos el tiempo ***t*** y se introduce en la expresión de ***y***:

$$t = \frac{1}{b}\ln\left(1 + \frac{bv_{0y}}{g}\right)$$
$$y = \frac{v_{0y}}{b} - \frac{g}{b^2}\ln\left(1 + \frac{bv_{0y}}{g}\right)$$

2.2. Fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad.

Si despreciamos el empuje, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa ***m*** son como hemos visto ya: El peso ***mg***, la fuerza de rozamiento ***Fr***, que es de sentido contrario al vector velocidad (tangente a la trayectoria). ***Fr = -bmv·v***.

Las ecuaciones del movimiento del cuerpo serán por tanto:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -mbv_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -mg - mbv_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se resuelven aplicando procedimientos numéricos.

Las condiciones iniciales son las misma que en la sección anterior ***t=0, Vox=Vo·cosq, Voy=Vo·senq, x=0, y=0.***

2.2.1. Alcance del proyectil, altura máxima y tiempo de vuelo.

En el apartado anterior, se ha calculado la trayectoria del proyectil resolviendo un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden. En este apartado, vamos a integrar las ecuaciones del movimiento para calcular el alcance, el tiempo de vuelo y la altura máxima.

En el intervalo de tiempo comprendido entre ***t*** y ***t+dt***, la dirección del vector velocidad cambia un ángulo ***dθ***, que es el ángulo entre las tangentes o entre las normales. El móvil se desplaza en este intervalo de tiempo un arco ***ds=ρ·dθ***, tal como se aprecia en la **Figura 2.**

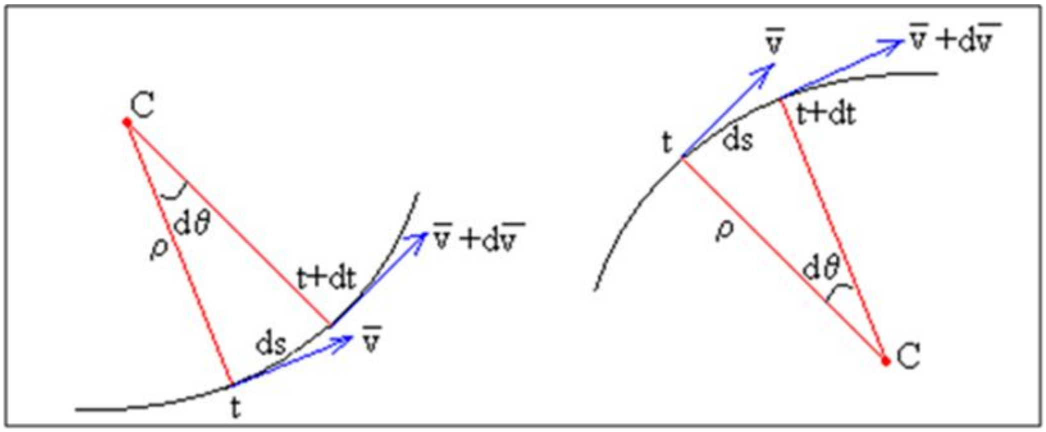

Figura2: vector velocidad en el movimiento de proyectiles con fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{v}{\rho}\frac{dv}{d\theta}$$

Hemos de tener en cuenta que la curvatura de la trayectoria es negativa (figura de la derecha). La curva queda a la derecha de la tangente tomada en sentido de las ***x*** crecientes. La igualdad anterior se escribe para este caso:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\rho}\frac{dv}{d\theta}$$

Las ecuaciones del movimiento en la dirección tangencial y en la dirección normal se convierten en una única ecuación diferencial de primer orden.

$$\frac{g\cos\theta}{v}\frac{dv}{d\theta} = bv^2 + g\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\frac{1}{v^3}\frac{dv}{d\theta} - \frac{1}{v^2}\tan\theta = \frac{b}{g\cos\theta}$$

Haciendo el cambo de variable ***u=1/v2*** se tiene:

$$\frac{du}{d\theta} + 2\tan\theta u = \frac{-2b}{g\cos\theta}$$

Esta ecuación es del tipo lineal (véase Puig Adam P., Curso teórico-práctico de Ecuaciones Diferenciales aplicado a la Física y Técnica. págs. 29-30), se busca una solución del tipo ***u=w(θ)·z(θ).*** Después de aplicar el método propuesto se llega a las siguientes expresiones para el cálculo del tiempo y el desplazamiento:

$$x = -\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{v^2}{g} d\theta \qquad\qquad t = -\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{v}{g\cos\theta} d\theta$$

2.3. Análisis de las ecuaciones utilizando Matlab.

El objetivo de este epígrafe es la implementación de un software que valide todas las consideraciones teóricas expresadas con anterioridad y que sea empleado en dos campos fundamentales:

- Como herramienta en la preparación de tropas de artillería en la defensa de la patria.
- Como una útil herramienta de comprobación y estudio para los estudiantes de la educación superior en el tema de lanzamiento de proyectiles.

Es importante aclarar que se decide utilizar Matlab pues constituye un software orientado a ser utilizado por la asignatura de Matemática en las carreras de ingenierías. En muchas ingenierías Matlab es utilizado como el software de estudio para las modelaciones e implementaciones de sistemas.

Matlab propone una interfaz muy conveniente para la resolución de ecuaciones, así como la obtención de gráficas, muy convenientes en el contenido abordado.

2.3.1. Implementación de las ecuaciones de lanzamiento de proyectiles.

El primer paso constituye el cálculo del ángulo necesario del cañón para que el proyectil alcance (impacte) una coordenada determinada (objetivo del disparo):

Se establecen las constantes utilizadas: `g=9.80665 m/s^2, pi=3,14159265358979323846264338327 95.`
Es necesario para facilitar los cálculos transformar la ecuación de proyectiles en una ecuación polinómica expresada en función de ¨***q***¨ que representa el ángulo a calcular.
Esta nueva ecuación de grado tres tendrá como coeficientes:

```
A= (((g^2)*(x^4))/ (4*(V^4)));

B= (((g*y*(x^2))/ (V^2))-(x^2));

C= ((x^2)+ (y^2));
```

Como se aprecia en la **Figura 3** tomada durante la implementación de este programa es necesaria la introducción de las coordenadas de impacto del proyectil (datos señalados en rojo) y otro dato lo constituye la velocidad inicial del proyectil, lo cual es un dato conocido en las piezas de artillería.

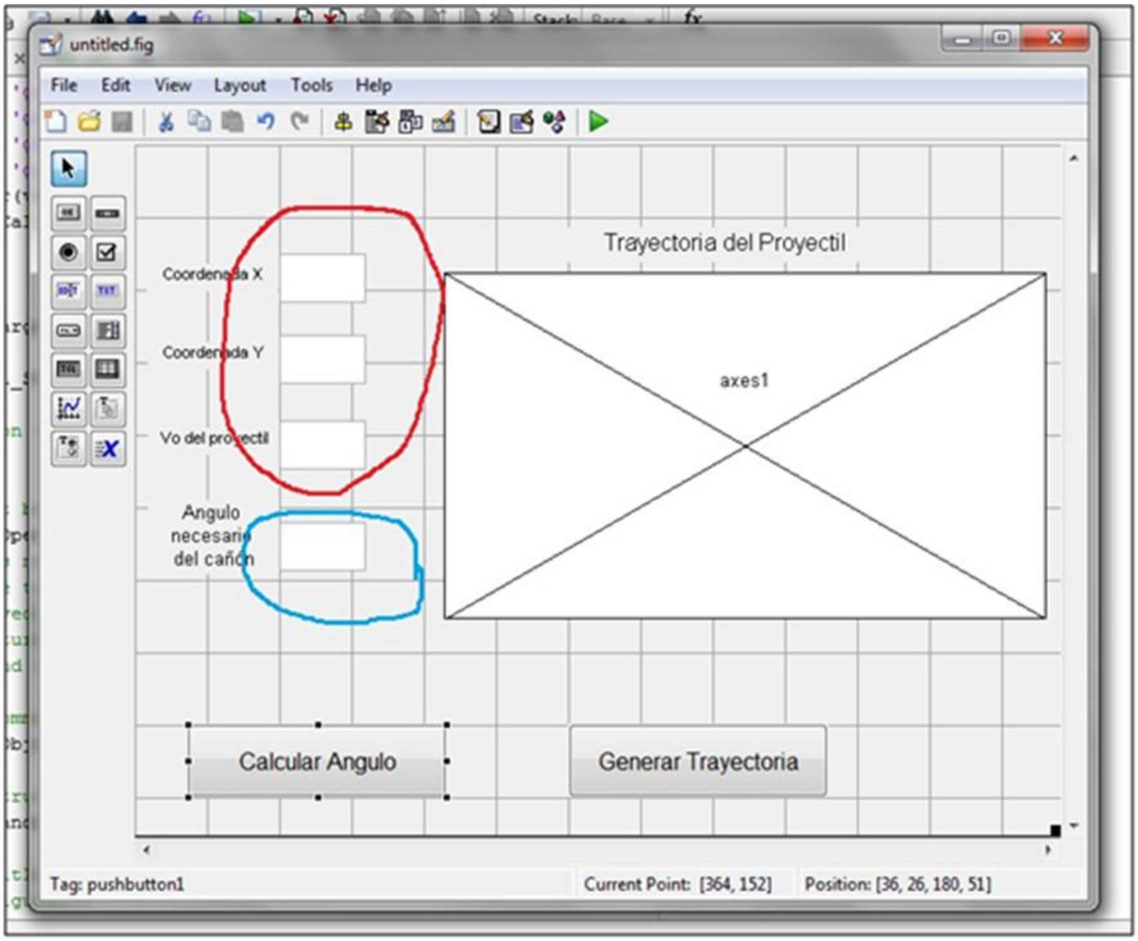

Figura 3: Confección del programa

Posteriormente se procede a la extracción de las raíces y a la conversión de radianes a grados:

```
r=roots ([A B C]);
R=r (1, 1);
q=acos (1/(r. ^ (0.5)));
Q=q*180/pi
```

Calculando así el valor del ángulo.

2.3.2. Ejemplo de aplicación del método descrito.

Tomaremos un ejemplo sencillo utilizado con frecuencia en los materiales docentes de Física I de la educación superior cubana:

Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial de 37.0m/s y se desea que impacte a una distancia de 134m. Determine el ángulo al que debe ser lanzado.

Es importante destacar que la situación que se presenta en este problema es muy similar a la enfrentada por los artilleros de infantería en maniobras o situaciones bélicas.

En este caso tenemos el dato de la velocidad inicial y las coordenadas (x; y) lo que resta es introducir estos datos en Matlab y con el algoritmo anterior determinar el valor del ángulo:

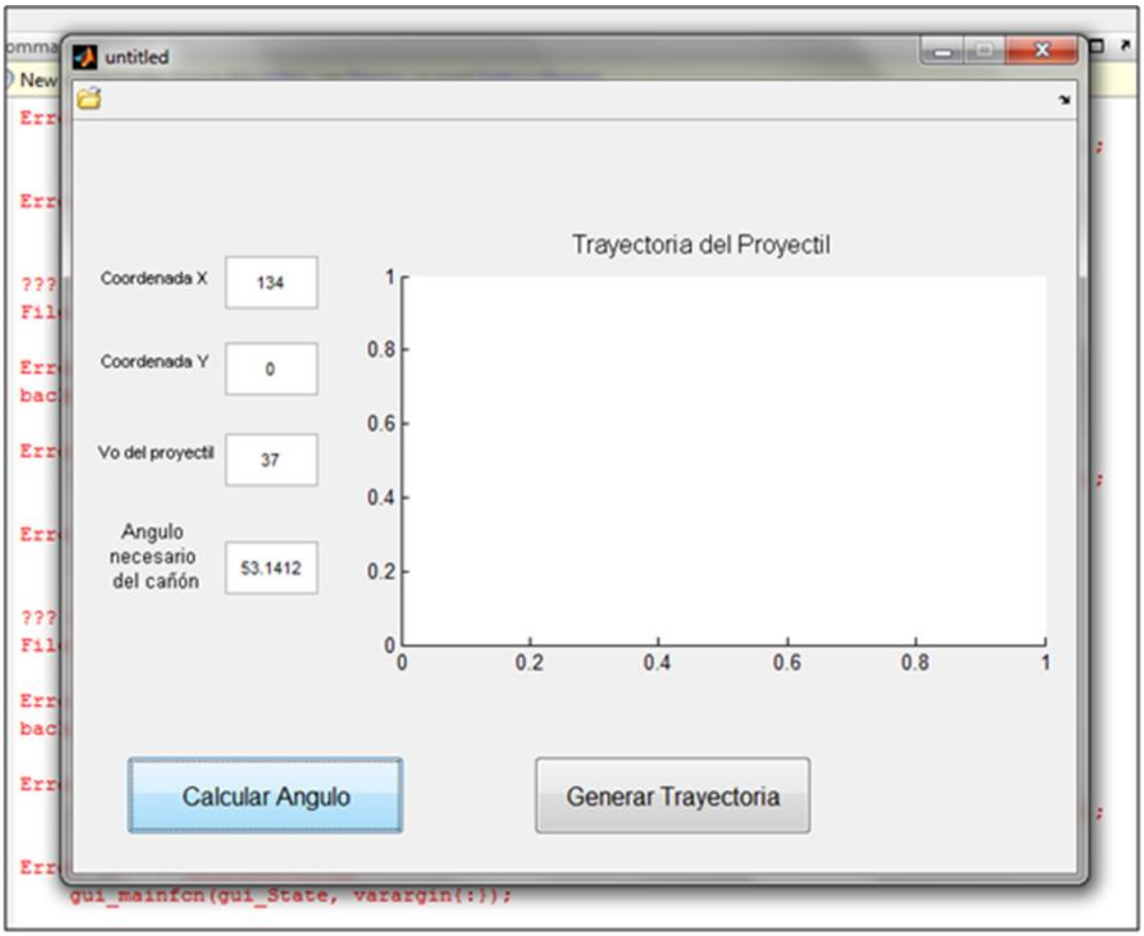

Figura 4: Calculo del ángulo necesario.

Como se aprecia en la **Figura 4**, para una ***Vo=37m/s^2*** se necesita una inclinación de ***53.1412*** grados para impactar un objetivo situado a ***134m.*** (Esto concuerda con los cálculos realizados por métodos estudiados en clases de la asignatura de Física I).

El segundo paso fundamental en el desarrollo de la aplicación es la generación de una gráfica que ilustre la trayectoria recorrida por el proyectil, con el objetivo de ilustrar y mejorar la comprensión de los resultados brindados por el software.

En el caso de la implementación de la gráfica o trayectoria recorrida por el proyectil se tiene en cuenta el punto de impacto (localización del objetivo) como punto final de la trayectoria. Los ejes coordenados serán autoajustables, es decir, tendrán valor y escala en función de la distancia a recorrer.

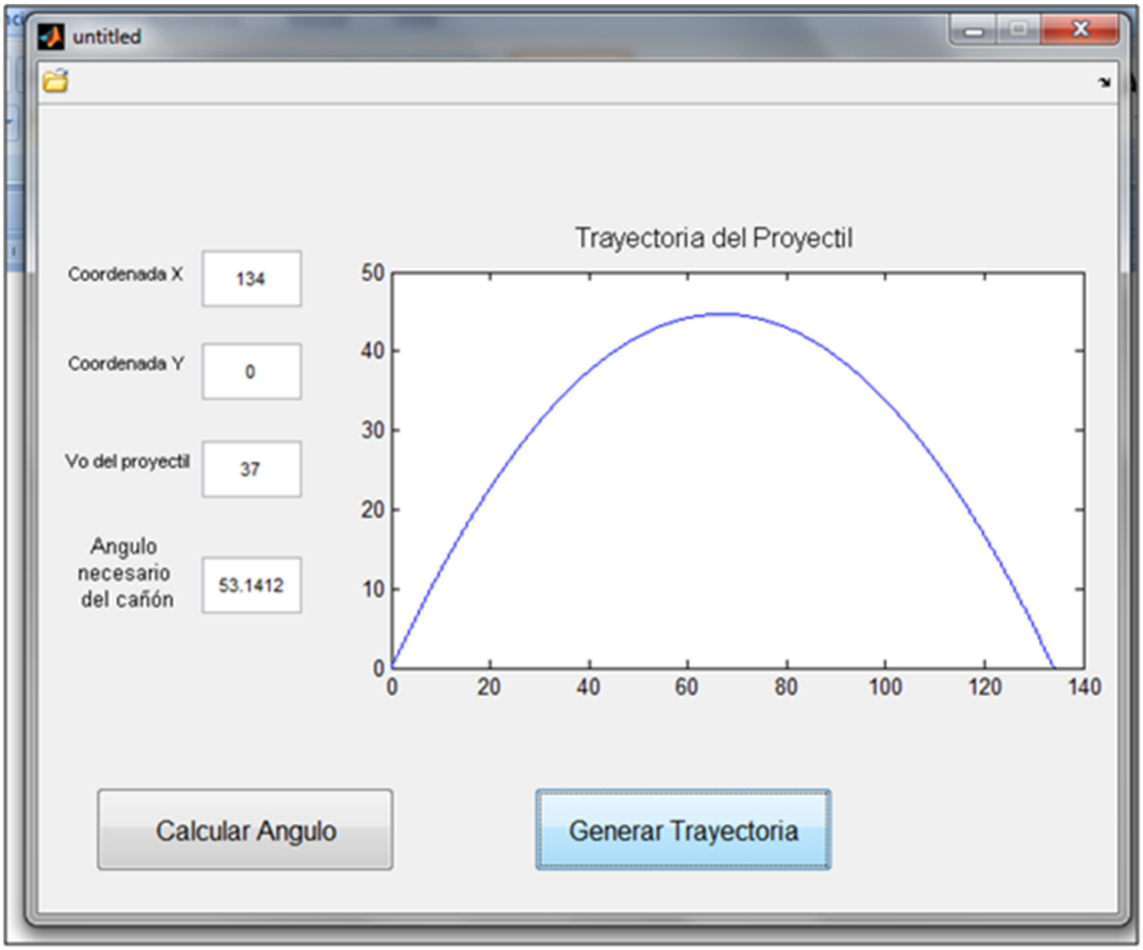

Figura 5: Gráfica de desplazamiento del proyectil.

En este ejemplo se aprecia como el proyectil impacta en la coordenada (134; 0), lo cual es consecuente con los valores que fueron introducidos en el software, se describe una trayectoria parabólica donde el ángulo de salida es mayor que 45 grados (53.1412).

Analizaremos ahora el caso de que el objetivo tenga una componente en y diferente de cero, es decir que el objetivo se encuentre a una altura determinada, o que las condiciones topológicas sugieran que se encuentre a una altura determinada.

Como se muestra en la siguiente figura el programa calcula el ángulo necesario y dibuja la gráfica satisfactoriamente para el caso en que la coordenada de impacto presente valores no nulos en las coordenas del objetivo.

Conclusiones.

Las condiciones geográficas de Cuba hacen que el estudio y la preparación militar, en el campo de la artillería, sean fundamentales en la defensa de la patria. La aplicación de contenidos de Física en el mejoramiento de técnicas de armamento artillero, es de vital importancia, pues al aumentar la precisión de los disparos, no solo aumenta la efectividad de aniquilación del enemigo sino que minimiza los costos en municiones.

La realización de este software puede contribuir en la preparación de tropas artilleras y puede confrontarse con las técnicas utilizadas actualmente por las F.A.R, para su posible evaluación. Docentemente constituye una herramienta muy versátil para que el estudiante comprenda y compruebe los resultados obtenidos en clases, así como la validez de las formulas estudiadas en clases.

Bibliografía.

Brancazio. 1997. *Looking into Chapman's homer: The physics of judging a fly ball.* s.l. : Am. J. Phys. 53, 1997. págs. 849-855. (9).
Erlichson. 1983. *Maximum projectile range with drag and lift, with particular application to golf.* s.l. : Am. J. Phys, 1983. págs. 357-362.
Warburton R. D. H., Wang J. 2004. *Analysis of asymptotic projectile motion with air resistance using Lambert W function.* s.l. : Am. J. Phys, 2004. págs. 1404-1407. 72 (11).