LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA NUMÉRICA EN LA ACTUALIDAD

Dr. C. Reinaldo Hernández Camacho[1], Ing. Mayté Reyna Hernández[1]

1. *Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Vía Blanca Km.3, Matanzas, Cuba.*

Resumen.

La enseñanza de la Matemática Numérica tiene el gran inconveniente de los extensos cálculos aritméticos que generalmente se necesitan realizar cada vez que se resuelve un ejercicio empleando alguno de los métodos numéricos. Esto ocasiona cierta aversión por parte de los estudiantes que sienten esos cálculos como algo tedioso y aburrido.

Existen criterios muy variados, por parte de los profesores, con relación a la metodología que debe ser empleada en las clases de Matemática Numérica.

El objetivo de este trabajo es analizar y compartir una experiencia, un tanto diferente a las tradicionales, que ha sido puesta en práctica en la Universidad de Matanzas con muy buenos resultados.

***Palabras claves**: Matemática numérica; métodos numéricos.*

Introducción.

La Matemática Numérica siempre ha tenido una gran importancia dentro de la Matemática, por la posibilidad que brinda de obtener soluciones aproximadas de muchas operaciones en las cuales no siempre es posible adquirir su solución exacta mediante los métodos analíticos tradicionales. La utilización de los métodos numéricos se ha incrementado en los últimos tiempos, por los avances experimentados en el campo de la Informática. Son muchos los ejemplos prácticos que se pueden citar con relación a la necesidad de utilizar estos métodos. Por sólo citar algunos, digamos que existen infinidad de ecuaciones algebraicas a las cuales se necesita determinar sus ceros y no es posible obtenerlos si no es mediante la aplicación de métodos numéricos. Lo mismo puede decirse con respecto a las integrales definidas y a las ecuaciones diferenciales. Existen integrales cuyos integrandos tienen una apariencia aparentemente sencilla, y sin embargo, su primitiva no puede ser expresada en términos de combinaciones finitas de funciones elementales, lo cual impide que la integral pueda calcularse mediante los métodos analíticos exactos. Con la resolución de ecuaciones diferenciales, que tienen condiciones iniciales, resulta aún peor. La necesidad de que la ecuación diferencial que se intenta resolver se corresponda con alguno de los tipos de ecuaciones estudiados, hace que con mucha frecuencia no exista la posibilidad de resolverla por métodos analíticos y se necesite aplicar métodos numéricos.

Por otra parte, la enseñanza de los métodos numéricos tiene sus dificultades. Para resolver un ejercicio mediante uno de estos métodos, generalmente se necesita realizar un gran número de cálculos aritméticos extensos. Esto hace que las clases de Matemática correspondiente a estos contenidos resulten aburridas y tediosas para los estudiantes.

Los criterios de los profesores en cuanto a la metodología que debe ser empleada en la enseñanza de los métodos numéricos, son muy variados y ciertamente no es fácil encontrar la forma ideal de proceder en este sentido.

En este trabajo se pretende analizar las principales tendencias actuales en lo relacionado con la enseñanza de los métodos numéricos y proponer una forma específica de interacción con los estudiantes, que en la práctica ha tenido resultados positivos.

Desarrollo.

1. ¿Qué es la Matemática Numérica?

La Matemática Numérica es una rama de la Matemática que se ocupa de la obtención de soluciones aproximadas, mediante operaciones aritméticas, de muchos problemas, que en algunos casos, no pueden ser resueltos a través de los llamados métodos analíticos o exactos; y que en otros casos, aún cuando puedan ser resueltos por métodos analíticos, su aplicación práctica resulta demasiado complicada.

Los métodos numéricos tienen la característica de ser más generales que los métodos analíticos. Significa esto que pueden ser aplicados a una gama mucho más amplia de ejercicios matemáticos. Por ejemplo, para calcular un conjunto de integrales definidas, por vía analítica, puede que en algunos casos sea suficiente el empleo de una tabla de integrales, en otros casos, tal vez, se necesite utilizar el método de integración por sustitución, en otros utilizar el método de integración por partes y en otros emplear la integración por fracciones simples. Sin embargo, todas esas integrales definidas pueden calcularse con un mismo método numérico, independientemente de la complejidad que tenga cada una de las integrales. Y no deja de causar admiración, que mediante una cantidad finita de operaciones aritméticas, se pueda calcular cualquier tipo de integral definida por complicada que esta sea, incluyendo aquellas en las cuales su integrando no posee una primitiva en términos de una cantidad finita de funciones elementales, como son los casos de $\int_a^b \frac{senx}{x}dx$, $\int_a^b \frac{\cos x}{x}dx$, $\int_a^b e^{-x^2}dx$ y muchas otras, que a primera vista no parecen tan complejas.

Existen muchas otras situaciones que ilustran la necesidad de desarrollar y estudiar la Matemática Numérica. Por ejemplo, desde la enseñanza media se estudia la forma de calcular los ceros de una función polinómica de segundo grado. En particular, existe una fórmula muy conocida que permite calcular esos ceros, cualesquiera que sean sus coeficientes. Hay también fórmulas, aunque no se suelen estudiar en las aulas por su complejidad, para determinar los ceros de funciones polinómicas de tercer y cuarto grado, pero no existen fórmulas generales para determinar las raíces de funciones polinómicas de grado mayor o igual que 5. Mucho menos se pueden encontrar fórmulas generales para resolver ecuaciones en las que intervengan, ligadas, funciones exponenciales, trigonométricas y logarítmicas. La herramienta efectiva para darle solución a estos problemas es la Matemática Numérica.

Los métodos numéricos tienen, como atracción adicional, la ventaja de que se pueden implementar en computadoras digitales. Esta característica los hace más fáciles de utilizar y permite que las soluciones de los ejercicios mediante estos métodos puedan obtenerse en un tiempo muy breve.

Como aspecto negativo de los métodos numéricos está el hecho de que si se tienen que aplicar solamente con la utilización de lápiz y papel pueden resultar sumamente tediosos, porque suelen necesitar de un gran volumen de cálculos aritméticos, en los cuales es fácil cometer errores mecánicos, que a veces no son detectados por la persona que lo ejecuta hasta que no ha llegado, supuestamente, al final del ejercicio.

Otra característica, que los hace poco agradables para algunas personas, es saber que con los métodos numéricos, lo que se obtiene son soluciones aproximadas de las operaciones matemáticas que se estén efectuando y no soluciones exactas. Aunque en su favor cabe aclarar, que las aproximaciones pueden ser todo lo buenas que se desee. Es decir, que en la utilización de los métodos numéricos, por lo general, se controla que la solución aproximada tenga como máximo un error menor que un valor prefijado.

2. Breve reseña de algunos de los métodos numéricos que con mayor frecuencia se emplean en los programas de estudio.

2.1 Algunos métodos numéricos para la obtención de ceros de una función.

Entre los métodos más conocidos se encuentran:

-El método de bisección del intervalo.

-El método de regula-falsi.

-El método de Newton.

Cada uno de estos métodos se emplea cuando se ha logrado determinar un intervalo en el cual la función tiene un cero único. Para la determinación de ese primer intervalo donde la función tenga un cero único se pueden aplicar dos procedimientos generales, uno de ellos llamado procedimiento gráfico y el otro procedimiento analítico. El primero consiste en representar gráficamente la función a la cual se le desea hallar el cero (mediante el uso de una microcomputadora) y mediante la observación del gráfico determinar una primer intervalo en el cual se encuentre el cero que se desea calcular. A partir de ese momento se comienza a aplicar alguno de los métodos mencionados.

El método analítico puro se suele aplicar cuando no se tiene la posibilidad de graficar. Se emplea fundamentalmente cuando la función a la cual se desea determinar el cero es una función polinómica, ya que este tipo de funciones ha sido estudiada con cierta profundidad desde hace muchos años. Este método analítico consiste en la aplicación de algunos teoremas que permiten ir obteniendo intervalos cada vez menores donde se encuentre un cero de la función. Entre ellos se pueden citar los siguientes:

Regla de Lagrange: Cota superior para las raíces positivas.

En la ecuación algebraica de grado *n*: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$, con $a_0 > 0$, todas las raíces positivas (si existen) son menores que:

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

k: Posición del primer coeficiente negativo (a_k), $k \geq 1$, pues $a_0 > 0$ (Para determinar el valor de k sí se cuentan las posiciones de los coeficientes iguales a cero)

B: Valor absoluto del coeficiente negativo de mayor valor absoluto.

Para aplicar la regla de Lagrange a las raíces negativas se forma la ecuación $f(-x) = 0$ y se aplica entonces de forma similar a las raíces positivas, teniendo en cuenta que si *r* es una raíz positiva de $f(-x) = 0$ entonces $-r$ es una raíz negativa de la ecuación original.

Esta regla de Lagrange permite obtener un primer intervalo, que puede ser relativamente grande, donde se encuentren todas las raíces reales positivas y negativas del polinomio.

Otro teorema de suma importancia en este sentido es el de Bolzano.

Teorema de Bolzano:

Si f es continua en $[a,b]$, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos: $(f(a).f(b) < 0)$, entonces existe al menos un número $r \in (a,b)$ tal que $f(r) = 0$.

A este teorema se le puede añadir la siguiente condición:

Si f es continua en $[a,b]$, $(f(a).f(b) < 0)$ y f es monótona en $[a,b]$ entonces f tiene un cero único en ese intervalo.

Una vez que ya se ha logrado determinar un intervalo que contenga un cero único de la función, se procede a la aplicación de alguno de los métodos numéricos. A continuación se presentan sus principales características.

2.1.1 Método de Bisección del intervalo.

Si se cumplen las condiciones siguientes:

- La ecuación $f(x) = 0$ tiene una sola raíz en $[a,b]$
- f es continua en $[a,b]$
- $f(a).f(b) < 0$

Entonces:

a) Se determina el punto medio de $[a,b]$: $c = \frac{a+b}{2}$

b) Se halla $f(c)$

c) Si $f(a).f(c) < 0$, se toma como nuevo intervalo a $[a,c]$.

Si $f(c).f(b) < 0)$, se toma como nuevo intervalo a $[c,b]$.

d) Este proceso continúa hasta que la mitad de la longitud del último intervalo considerado sea menor que el error E prefijado: $\frac{b-a}{2} < E$

e) El valor aproximado de la raíz es el último valor de c.

2.1.2 Método de Regula Falsi.

(Se basa en ir hallando el punto de intersección con el eje X del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Si se cumplen las mismas condiciones del método de bisección. Entonces:

a) Se determina el punto $x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$

b) Se halla $f(x_n)$

c) Si $f(a).f(x_n) < 0$, se toma como nuevo intervalo a $[a, x_n]$

Si $f(b).f(x_n) < 0$, se toma como nuevo intervalo a $[x_n, b]$

d) El proceso continúa hasta que $|x_{n+1} - x_n| < E$, siendo E el error prefijado.

e) El valor aproximado de la raíz es el último valor de x_n.

2.1.3 Método de Newton.

(Consiste en ir hallando el cero (x_{n+1}) de la recta tangente a la curva determinada por $y = f(x)$ en el punto anterior $(x_n, f(x_n))$.

- Si existe un cero único en $[a,b]$
- $f'(x)$ y $f''(x)$ son continuas y no nulas en $[a,b]$
- Se cumple para algún $x_0 \in [a,b]$ (generalmente uno de los extremos del intervalo) la condición de convergencia:

  $f(x_0).f''(x_0) > 0$

Entonces puede aplicarse la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Entonces el algoritmo sería:

a) Tomar como x_0 un número x que cumple la condición de convergencia.

b) Hacer $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

d) Continuar el proceso hasta que $\left| x_{n+1} - x_n \right| < E$, siendo E el error prefijado.

e) El valor aproximado de la raíz es el último valor de x_n.

2.2 Algunos métodos numéricos para el cálculo de integrales definidas.

Los dos métodos más conocidos son el método de los trapecios y el método de Simpson.

El método de los trapecios consiste en realizar una partición del intervalo de integración $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud. Considerar que la gráfica de la función que representa el integrando se sustituye por un conjunto de segmentos de rectas que van uniendo las imágenes de dos x consecutivas de la partición, formándose así un conjunto de trapecios. La suma de las áreas de esos trapecios conduce a la fórmula siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[\mathrm{E}+2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\ ] \text{, donde } h = \frac{b-a}{n},\ E = y_0 + y_n$$

En el método de Simpson se hacen consideraciones similares al de los trapecios, con las diferencias de que la gráfica de la función que representa el integrando ahora se sustituye por un conjunto de fragmentos de parábolas que unen las imágenes de tres puntos consecutivos de la partición. Esto hace necesario imponer la condición de que para aplicar el método de Simpson, la cantidad de subintervalos tenga que ser par. A partir de estas condiciones se obtiene la siguiente fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[\mathrm{E}+4\mathrm{I}+2\mathrm{P}] \text{, donde } \quad h = \frac{b-a}{n},$$

$$E = y_0 + y_n\ , \quad I = y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}\ , \quad P = y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}$$

En realidad existen varios métodos numéricos más para calcular integrales definidas, algunos de los cuales se emplean cuando se quieren obtener aproximaciones que sean todo lo mejor posible. Entre los que se pueden citar están la fórmula de Gauss y el método de Romberg.

2.3 Algunos métodos numéricos para la aproximación de funciones.

Los dos procedimientos clásicos para la aproximación de funciones son la interpolación polinómica y el ajuste de curvas.

La interpolación polinómica consiste en, dado un conjunto de n+1 pares ordenados conocidos, pertenecientes a una función, determinar un polinomio de grado menor o igual que n que contenga a esos n+1 pares ordenados de la función. Esa función pudiera ser una función de expresión analítica conocida que se quiera sustituir de forma aproximada por un polinomio o pudiera ser (y esto es lo que ocurre con mayor frecuencia) que simplemente se conozcan solo esos n+1 pares ordenados y se quiera obtener el polinomio de interpolación a partir de ellos.

La interpolación polinómica se suele aplicar cuando se tiene suficiente confianza en cuanto a la exactitud de los pares ordenados con los que se cuenta y cuando la cantidad de pares ordenados conocidos no sea extremadamente grande, en cuyo caso se puede obtener un polinomio de grado muy elevado que resultaría poco práctico para trabajar con él.

Por el contrario, en el ajuste de curvas no se requiere que la función obtenida tenga que contener a todos los pares conocidos. Puede darse el caso, inclusive, que no contenga a ninguno de ellos. Aquí lo que se busca es, dentro de una familia de curvas, cuál de ellas es la que produce la menor desviación cuadrática con relación a los pares ordenados conocidos.

En lo que respecta a la interpolación polinómica, los métodos más conocidos son el de Lagrange y el de Newton. Este último con dos variantes, uno con diferencias finitas para puntos de interpolación igualmente espaciados y otro con diferencias divididas para cualquier tipo de puntos.

2.4 Algunos métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales.

El método numérico más sencillo para resolver ecuaciones diferenciales es el método de Euler. También se suelen estudiar en clases el método mejorado de Euler, también llamado método de Runge Kutta de segundo orden y el método de Runge Kutta de cuarto orden.

2.4.1 El método de Euler.

Este método se basa en la aproximación del valor de la función solución en cada punto, por el valor de la tangente a la curva solución en el punto anterior.

Supongamos una E.D. de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, que tiene como condición inicial $y(x_0) = y_0$, cuya solución particular exacta es y = y(x)

La tangente a la curva y= y(x) en el punto (x_m, y_m) tendrá como pendiente y'_m y su ecuación se expresa como:

$$y'_m = \frac{y - y_m}{x - x_m} \Rightarrow y - y_m = y'_m (x - x_m)$$

Si se evalúa para el punto (x,y) = (x_{m+1}, y_{m+1}), se obtiene:

$$y_{m+1} - y_m = y'_m(x_{m+1} - x_m)$$

$$y_{m+1} = y_m + y'_m(x_{m+1} - x_m)$$

Teniendo en cuenta que $y'_m = f(x_m, y_m)$ y haciendo $x_{m+1} - x_m = h$, tendremos, el Algoritmo del método de Euler.

$$y_{m+1} = y_m + h.f(x_m, y_m) \quad , \quad x_{m+1} = x_m + h$$

El método mejorado de Euler y el de Runge Kutta de cuarto orden consisten en evaluar la pendiente de la curva en varios puntos de cada intervalo y tomar un promedio pesado de estas, en definitiva de la derivada evaluada para cada uno de los puntos.

2.4.2 Método de Runge Kutta de segundo orden o mejorado de Euler.

Se evalúa dos veces la derivada en cada subintervalo, tomando el promedio pesado entre ambas. A partir de esas consideraciones se puede deducir el siguiente algoritmo:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \rightarrow \text{Algoritmo.}$$

$$x_{m+1} = x_m + h$$

$$k_1 = h.f(x_m; y_m)$$

$$k_2 = h.f(x_m + h; y_m + k_1)$$

2.4.3 Método de Runge Kutta de cuarto orden.

Se evalúa cuatro veces la derivada en cada subintervalo, tomando el promedio pesado entre esas cuatro derivadas. Se obtiene a partir de ellas el siguiente algoritmo:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \rightarrow \text{Algoritmo.}$$

$$x_{m+1} = x_m + h$$

$$k_1 = h.f(x_m; y_m)$$

$$k_2 = h.f(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h.f(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h.f(x_m + h; y_m + k_3)$$

Aunque aquí se ha hecho referencia a los métodos numéricos que con mayor frecuencia aparecen en los programas de estudio, en realidad hay programas que incluyen varios métodos más. Por ejemplo, estos mismos que se han analizado para resolver ecuaciones diferenciales también suelen incluirse para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales de orden superior.

Se suelen incluir también métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, como son los casos de los métodos de Jacobi y de Gauus-Seidel, que son muy prácticos, cuando se tienen implementados en programas de computación, para resolver sistemas compatibles determinados que tengan muchas incógnitas al igual que de ecuaciones, y también cuando los coeficientes de las incógnitas sean muy grandes o tengan muchos lugares decimales, en cuyos casos los métodos tradicionales se tornan muy laboriosos.

Hay también otro contenido matemático que últimamente se está incluyendo en los programas de estudio de la Matemática numérica, que es el de solución de problemas de optimización de funciones de una y de dos variable independientes. Para el caso de funciones de una variable independiente se pueden emplear el método de búsqueda secuencial y el método de bisección y para el caso de funciones de dos variables el método de búsqueda secuencial por coordenadas y el método del gradiente.

3. Tendencias en la enseñanza de la matemática numérica.

No todos los profesores tienen la misma opinión en lo relacionado con la forma de proceder en la enseñanza de los métodos numéricos. Algunos piensan que los estudiantes deben realizar todos los cálculos aritméticos necesarios a mano o auxiliándose solamente de una calculadora, para que de esa manera interpreten adecuadamente el método en cuestión. Sin embargo, esta forma de proceder tiene sus inconvenientes; el tiempo que invierte un estudiante para resolver un ejercicio es extenso, y en consecuencia el número de ejercicios que se resuelven en una clase es reducido. Si el estudiante comete algún error de cálculo, en el manejo de la computadora o en la secuencia de los pasos lógicos que desde el punto de vista matemático requiere el ejercicio, no existe ningún mecanismo de control que permita detectar el error de forma inmediata, lo cual trae como consecuencia que en muchas ocasiones, después de haber empleado un tiempo considerable de trabajo y haber llegado al final del ejercicio, el estudiante (o el profesor) se percata de que el resultado que ha obtenido no se corresponde con el que en realidad debía obtenerse. Se origina entonces un proceso de búsqueda del error para proceder nuevamente a resolver el ejercicio a partir del error detectado, con la consiguiente pérdida de tiempo. Es obvio también que la tarea del profesor de controlar la actividad independiente de los estudiantes es extremadamente difícil, pues el ritmo de trabajo de los estudiantes es muy diverso y en un momento dado cada cual va por un lugar diferente.

Otros profesores tienen una concepción bien diferente y opinan que los estudiantes deben programar cada uno de esos métodos en computación. La práctica indica que cuando se asume esta posición se presentan inconvenientes también. Uno de ellos es que no todos los estudiantes son capaces de realizar la programación de manera independiente y son sólo unos pocos los que realizan el trabajo, mientas la mayoría se dedica a copiar el trabajo hecho por alguno de sus compañeros más capaces o se buscan otras personas que le hagan la programación. Existe también el criterio de algunos profesores de que los estudiantes sólo necesitan aprender a trabajar con los llamados programas profesionales. Estos programas están diseñados para resolver cualquiera de los ejercicios que necesitaría efectuar un estudiante, necesitando solamente que le sean introducidos a la computadora los datos iniciales del problema y entonces ella se encarga de resolver el ejercicio y ofrecer la respuesta al usuario. Pero de esta forma el estudiante se convierte en un simple operario de máquina, incapaz de crear por sí mismo. Está claro que es muy importante en la etapa actual que el estudiante aprenda a manejar eficientemente una computadora y que aprenda a manejar esos tipos de programas, pero debe hacerlo de una forma consciente y no mecánica; y no se puede perder de vista jamás, la necesidad de que el estudiante comprenda los conceptos en que está basado cada uno de estos métodos desde el punto de vista matemático, para que pueda ser capaz en un futuro, inclusive, de crear nuevos métodos si eso fuera necesario.

Hay profesores que han tratado de establecer una especie de híbrido entre las dos tendencias anteriores. La idea consiste en realizar los primeros pasos del ejercicio manualmente y hacer uso después de los programas profesionales para que ellos se encarguen de realizar el resto. Quizás esto sea mejor; no obstante, cada una de estas etapas, en fin de cuentas, adolece en su momento de dificultades similares a cuando se aplica en forma pura durante toda la clase.

Ante la inconformidad con todas las tendencias anteriores de proceder para la enseñanza de los métodos numéricos, hace ya unos cuantos años, que en la Universidad de Matanzas se elaboraron varios programas de computación para la enseñanza de estos contenidos. La experiencia fue valiosa, pero los lenguajes de programación que fueron utilizados en aquella ocasión cayeron en desuso, porque los programas no corrían en las plataformas que se utilizan en la actualidad.

Con el propósito de resolver este inconveniente, se ha elaborado un nuevo software educativo utilizando lenguajes de programación orientada a objeto, para la enseñanza de los métodos numéricos. Naturalmente, con la experiencia acumulada en la etapa anterior y con las nuevas bondades que brinda la programación orientada a objeto, el software actual está adquiriendo una calidad muy superior a sus antecesores. Estos programas se han concebido, fundamentalmente, para ser utilizados en clases prácticas y en el estudio independiente, pero pueden ser aplicados también en conferencias y en evaluaciones frecuentes, parciales y finales.

4. Características del nuevo software.

El objetivo fundamental que se ha perseguido con la construcción de este nuevo software es el de liberar a los estudiantes de la desagradable tarea de realizar grandes cálculos aritméticos, aburridos y carentes de razonamientos, como es característico en los métodos numéricos, pero exigirles que vayan razonando y tomando decisiones en cada paso del ejercicio. Es decir, que sea el programa el que se encargue de realizar los cálculos aritméticos extensos, pero que los realice sólo cuando el estudiante sea capaz de comprender y dirigir conscientemente esa actividad. Que no sea el estudiante un mero usuario o espectador inactivo, sino que tenga que tomar decisiones conscientes para obtener el resultado deseado, que el estudiante realmente desarrolle habilidades matemáticas en la utilización de los métodos numéricos, mediante la interactividad personal con el software, razonando cuando corresponda razonar, tomando decisiones cuando sea necesario, para que logre un aprendizaje significativo, realizando cálculos aritméticos moderados, pero no tediosos.

Los programas contienen ayudas sobre las partes teóricas y prácticas de los métodos, en algunos casos apoyados en ilustraciones gráficas, que contribuyen a una mejor comprensión de los contenidos. Un ejemplo de ello se puede apreciar en los métodos para obtener soluciones aproximadas de los ceros de una función. Aquí se da la opción al estudiante de observar el gráfico de la función a la cual se le quiere hallar una raíz. Si el estudiante indica que desea graficar la función, debe elegir, entonces, a partir de qué valor del dominio desea comenzar, además, cuál es el paso que desea utilizar en la graficación y cuántos puntos desea emplear. Inmediatamente el software muestra la gráfica de la función en el intervalo seleccionado y de esa manera el estudiante puede comprobar si efectivamente existe un cero de la función en ese intervalo o si por el contrario el intervalo que había considerado era incorrecto. Tan pronto como lo desee puede retornar al mismo lugar por donde iba en el ejercicio. En este caso se estaría

haciendo uso del método gráfico para la separación de raíces de la función; es decir, para obtener un intervalo que contenga una sola raíz de la función.
La parte principal de este software es la solución de ejercicios prácticos, donde primeramente el usuario tiene que darle entrada a los datos que se necesitan para resolver el ejercicio. El programa va controlando estos datos al instante y si alguno no es compatible con los anteriores, aparece un mensaje por la pantalla de la computadora señalando la imposibilidad de ser aceptado y el por qué. Se mantiene un control absoluto del teclado, para que no se introduzcan errores mecánicos en los datos o se deje vacía una caja de texto que debe ser llenada. Una vez concluida esta etapa de entrada de datos se da la opción de elegir el método que se desee, dentro de los que estén disponibles en el programa para ese tipo de contenido. Comienza entonces la solución práctica del ejercicio. Para ello aparecerá en la pantalla de la microcomputadora un esquema de cálculo semejante al que se acostumbra a utilizar en el pizarrón para el método numérico que se haya elegido, de manera que el trabajo frente a la computadora se realice de la forma más natural posible. El estudiante comienza, entonces, a resolver su ejercicio de Matemática Numérica.
A partir de ahí, el programa se encargará de realizar los cálculos numéricos extensos, pero cada vez que se necesite realizar un paso en la solución del ejercicio que requiera algún razonamiento concerniente al método numérico que se esté aplicando en ese instante, será el usuario quien tendrá que tomar la decisión y teclear el dato que corresponda escribirse en el esquema de cálculo.
Si el dato emitido es correcto la ejecución del ejercicio continuará avanzando; si no lo es, instantáneamente se indicará a través de un mensaje que se ha cometido un error y se instará a enmendarlo. Hasta tanto el usuario no teclee la respuesta correcta estará recibiendo el mensaje de haber cometido un error y el programa no continuará hacia delante. En estas situaciones el estudiante tiene la posibilidad de pedir ayuda, a través de la cual recibirá una explicación del método numérico en cuestión y de la forma práctica de desarrollarlo. Una vez concluido el ejercicio, el software le comunicará al usuario la cantidad de errores que cometió y la evaluación que recibe como consecuencia de la ejecución del mismo.
Con estas características en que han sido concebidos estos programas, de ir controlando el avance del ejercicio paso a paso, se evita la desagradable situación en que se ven envueltos los estudiantes frecuentemente, cuando están resolviendo un ejercicio de matemática numérica a mano o con el empleo de calculadoras, al percatarse, después de

extensos cálculos, que han cometido algún error durante el ejercicio pero no saben dónde, por lo cual, muchas veces, tienen que comenzar de nuevo el ejercicio. Además, ese control constante que ejerce el programa en cada paso que vaya dando el estudiante le provoca una mayor motivación, en contraposición con el aburrimiento que suelen producir los cálculos aritméticos continuados. Le ofrece, también, mayor seguridad al estudiante cuando va observando el progreso de su trabajo. La mayoría de los estudiantes toman el enfrentamiento con este software como un reto, en el mejor sentido, lo toman como un juego al que desean ganar, lo cual se traduce en desear resolver el ejercicio y que al final el programa le dé una evaluación satisfactoria.

Cuando hay dos o más estudiantes con dificultades similares, en ocasiones resulta provechoso establecer una especie de competencia entre ellos, asignándoles ejercicios para que los resuelvan de forma independiente durante una clase práctica e ir registrando las evaluaciones que el software les va otorgando par decidir al final cuál resulta ganador.

Es posible también la asignación de trabajos independientes, sobre todo para los estudiantes con dificultades.

Si se desea emplear este software para realizar evaluaciones parciales o finales, en un laboratorio de computación, es recomendable preparar, anticipadamente, un número considerable de ejercicios para cada uno de los contenidos, por una parte para garantizar la mayor independencia posible en la ejecución de los ejercicios evaluativos y por otra parte para que exista la mayor equidad en cuanto al grado de dificultad de los ejercicios que le correspondan a cada estudiante.

Si el grupo de estudiantes que van a ser evaluados es numeroso es preferible que estén presentes en el laboratorio de computación más de un profesor, para el control adecuado de la actividad.

Conclusiones:

Con la aplicación de este software educativo se puede lograr:

- Mantener la motivación de los estudiantes durante todo el desarrollo de una clase práctica.
- Desarrollar las clases de una forma más dinámica y amena.
-Resolver un mayor número de ejercicios.
-Lograr una adecuada comprensión de los métodos a través de su interpretación geométrica.

-Mantener el control del trabajo individual de cada estudiante.

-Evaluar a los estudiantes en una clase práctica, o en cualquier tipo de evaluación.

- Atender las diferencias individuales.

- Realizar encuentros de conocimientos.

Bibliografía.

1) Álvarez, Manuel. (2004). Matemática Numérica. Editorial Félix Varela. La Habana. Cuba.

2) Arstanov, MZH y otros. (1982). El juego didáctico como medio de organizar la enseñanza problémica en el CES. La Habana. Cuba.

3) Jacobson Ivar y otros. (2006) El proceso unificado de desarrollo de software. Volumen I. Editorial Félix Varela. La Habana.

4) Hernández Camacho Reinaldo. (2007). Propuesta didáctica para identificar cuándo la Integral Definida es aplicable para resolver un problem**a**. Revista INIE. Actualidades Investigativas en Educación. Costa Rica.

5) Hernández Camacho Reinaldo. (2009**).** La participación de los estudiantes mediante la conversación heurística. COMAT. Evento Internacional de Matemática y Computación. Matanzas. Cuba.