

FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Ing. Alexei Copa Hernández¹

1. *Ingeniero en Telecomunicaciones y Electrónica. Profesor Instructor, Sede Universitaria Municipal de la Universidad de Matanzas en Cárdenas, Matanzas, Cuba.*

Resumen.

El presente trabajo tiene por objetivo realizar un estudio de los principales aspectos relacionados con la propagación de las ondas electromagnéticas. En el mismo se recogen de forma clara y sintética los fundamentos físico-matemáticos que se consideran necesarios para la comprensión general de dicho fenómeno, partiendo de la presentación y análisis de las ecuaciones de Maxwell, y pasando sucesivamente por el análisis de distintos aspectos, tales como: la representación en coordenadas rectangulares y polares, las condiciones de contorno, la definición de los coeficientes de transmisión y reflexión de las ondas, entre otros, logrando presentar una visión global del tema.

Palabras clave: Propagación; ondas electromagnéticas; condiciones de contorno; transmisión; reflexión.

Introducción

La vida moderna ha puesto al servicio del hombre toda una serie de facilidades impensables hasta hace relativamente unos pocos años. Todos ven con normalidad que a sus hogares lleguen, por ejemplo, las señales de la televisión, de la radio o de la telefonía móvil, hecho que resulta posible, en gran medida, gracias a la radiación, propagación y recepción de ondas electromagnéticas. Estos fenómenos pueden ser descritos a través de las Ecuaciones de Maxwell, las que aplicadas a ciertas particularidades de obligada consideración, ayudan a modelar matemáticamente los mismos, así como contribuyen a conformar una idea general de cómo ocurren.

Ecuaciones de Maxwell

Fue el genio de James Clerk Maxwell el que combinó el trabajo previo de Michael Faraday, André Marie Ampere y Carl Fredrick Gauss en una teoría unificada del campo electromagnético (Gross, 2005). Las ecuaciones en cuestión, en forma diferencial, se resumen a continuación:

$$\text{Ley de Faraday: } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad [1]$$

$$\text{Ley de Ampere: } \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad [2]$$

$$\text{Leyes de Gauss: } \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad [3]$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad [4]$$

donde: \vec{E} : vector intensidad del campo eléctrico, (V/m);

\vec{D} : vector de densidad del flujo eléctrico, (C/m²);

\vec{H} : vector intensidad del campo magnético, (A/m);

\vec{B} : vector de densidad del flujo magnético, (W/m²);

\vec{J} : vector de densidad volumétrica de corriente, (A/m²);

ρ : densidad volumétrica de carga, (C/m³).

La forma diferencial de la Ley de Faraday, mostrada en [1], relaciona los campos eléctrico y magnético, demostrando que un voltaje puede ser generado variando el flujo magnético que atraviesa una superficie dada, o sea, cómo los campos magnéticos variables en el tiempo, producen campos eléctricos. Por otra parte, la Ley de Maxwell-Ampere [2], muestra cómo un campo eléctrico que varía con el tiempo, produce un campo magnético. La Ley de Gauss, representada en [3], explica cómo el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada, es igual a la densidad volumétrica de carga encerrada en la misma. Por su parte, la Ley representada en [4] muestra cómo el flujo magnético a través de una superficie cerrada es igual a cero, ya que entran en esa superficie tantas líneas de campo magnético como salen, por la presencia de los dipolos magnéticos, implicando que las líneas de campo magnético deben ser cerradas, lo cual expresa la no existencia del monopolo magnético. Las densidades de flujo se relacionan con las intensidades de campo, como sigue (Ortega, 1990):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad [5]$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad [6]$$

donde: $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, es la permitividad eléctrica absoluta del medio, (F/m);

ϵ_r , es la permitividad eléctrica relativa;

ϵ_0 , es la permitividad eléctrica del vacío, igual a 8.85×10^{-12} F/m.

$\mu = \mu_r \mu_0$, es la permeabilidad magnética absoluta del medio, (H/m);

μ_r , es la permeabilidad magnética relativa;

μ_0 , es la permeabilidad magnética del vacío, igual a $4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

Al representar los campos eléctrico y magnético en forma fasorial (\vec{E}_s y \vec{H}_s), las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas como sigue:

$$\nabla \times \vec{E}_s = -j\omega\mu \vec{H}_s \quad [7]$$

$$\nabla \times \vec{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E}_s \quad [8]$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_s = 0 \quad [9]$$

$$\nabla \cdot \vec{H}_s = 0 \quad [10]$$

Dichas expresiones muestran a su vez, cómo los campos pueden ser expresados de forma compleja como sinusoides, esto es: $\vec{E} = \text{Re} \{ \vec{E}_s e^{j\omega t} \}$ y $\vec{H} = \text{Re} \{ \vec{H}_s e^{j\omega t} \}$.

Ecuación de onda de Helmholtz

Un trabajo matemático adecuado con las ecuaciones [7], [8] y [9], así como la consideración de que las ondas se propagan en el vacío, permiten obtener las ecuaciones vectoriales de la onda de Helmholtz (Sadiku, 2001):

$$\nabla^2 \vec{E}_s - \gamma^2 \vec{E}_s = 0 \quad [11]$$

$$\nabla^2 \vec{H}_s - \gamma^2 \vec{H}_s = 0 \quad [12]$$

$$\text{donde } \gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \quad [13]$$

se conoce como la constante de propagación.

Como se observa, es una cantidad compleja, debido a esto, puede ser reescrita de la manera siguiente:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad [14]$$

siendo α la constante de atenuación de la onda, expresada en Np/m; y β la constante de fase, expresada en rad/m, pudiendo ambas ser calculadas como sigue:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} \quad [15]$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]} \quad [16]$$

donde ω es la frecuencia angular (rad/s) y σ es la conductividad del medio (S/m). Al término $\sigma/\omega\epsilon$ se le llama tangente de pérdidas. Cuando este valor es menor que 0.1, se dice que el medio (o el material) es buen aislante (o dieléctrico); mientras que si su valor es mayor que 100, es en cambio buen conductor (Gross, 2005).

Propagación de las ondas representadas en coordenadas rectangulares

Las ecuaciones vectoriales de Helmholtz, pueden ser resueltas en cualquier sistema de coordenadas ortogonales sustituyendo apropiadamente el operador ∇ para cada sistema coordenado. La figura 1 muestra un sistema de coordenadas rectangulares, sobre la superficie terrestre.

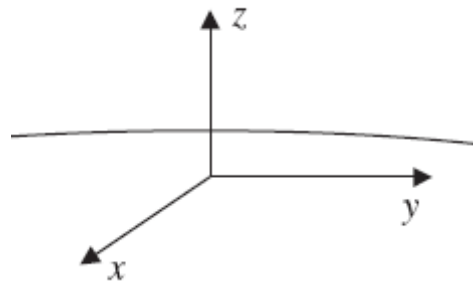


Figura 1

Si se asume polarización de \vec{E} en la dirección del eje z, y propagación en el eje x, es posible, a partir de la ecuación [11], obtener lo siguiente:

$$E_{zs}(x) = E_0 e^{-\gamma x} + E_1 e^{\gamma x} \quad [17]$$

Esta ecuación está en forma fasorial. Si se desea llevarla al dominio del tiempo, bastaría con introducir el término $e^{j\omega t}$, quedando entonces como sigue:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \vec{z} \quad [18]$$

Propagación de las ondas representadas en coordenadas esféricas

Análogamente, se puede obtener la ecuación de la onda para el caso de la propagación del campo eléctrico producido desde una fuente isotrópica en coordenadas esféricas. La figura 2 muestra un sistema de coordenadas esféricas, sobre la superficie terrestre.

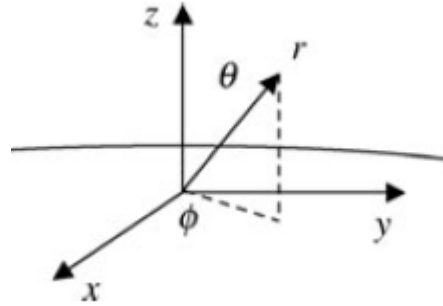


Figura 2

Si se asume polarización de \bar{E} en la dirección de θ y que sólo es función de r , es posible, a partir de la ecuación [11], obtener lo siguiente:

$$E_{\theta s}(r) = \frac{E_0 e^{-\gamma r}}{r} \quad [19]$$

Como se observa, la ecuación está en forma fasorial. Para llevarla al dominio temporal, se procede de modo similar a lo descrito para tales efectos en la sección anterior, permitiendo obtener el siguiente resultado:

$$\bar{E}(r, t) = \frac{E_0 e^{-\alpha r}}{r} \cos(\omega t - \beta r) \bar{\theta} \quad [20]$$

La diferencia entre ambos resultados [18] y [20] radica en el hecho de que para trabajar en coordenadas esféricas se presume la existencia de una fuente que produce las ondas que se propagan, dando lugar a la dependencia $1/r$. Este factor es llamado “dispersión esférica”, e implica que al ser la radiación proveniente de una fuente puntual, el campo se dispersa a su alrededor, a través de una esfera cuyo radio es r (Hayt y Buck, 2001).

Condiciones de contorno del campo eléctrico

Los contornos interrumpen el flujo de propagación de los campos. Las discontinuidades del medio dan como resultado la reflexión, transmisión, refracción, difracción y dispersión de los campos, los que a su vez, producto de estas perturbaciones, dan lugar a condiciones de multitrayecto. Las condiciones de contorno deben ser establecidas por tanto, en el orden de determinar las características de la reflexión, transmisión y refracción entre medios dieléctricos. Dos de las ecuaciones de Maxwell, en forma integral, pueden ser usadas para establecer las condiciones de contorno para el campo eléctrico (las tangenciales E_t , y las normales D_n , respectivamente) (Gross, 2005):

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \quad [21]$$

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q_{enc} \quad [22]$$

En la figura 3, se muestran las condiciones de contorno entre dos medios (con ϵ_1 y ϵ_2), con las correspondientes componentes normales y tangenciales del campo E :

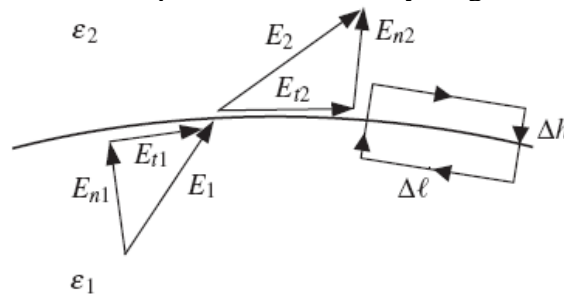


Figura 3

Analizando adecuadamente, se demuestra que:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad [23]$$

La igualdad a la que se llega en [23], demuestra que las componentes tangenciales del campo eléctrico son continuas a través del contorno.

En la figura 4, se muestran las condiciones de contorno entre dos medios (con ϵ_1 y ϵ_2), con las correspondientes componentes normales y tangenciales del flujo eléctrico D :

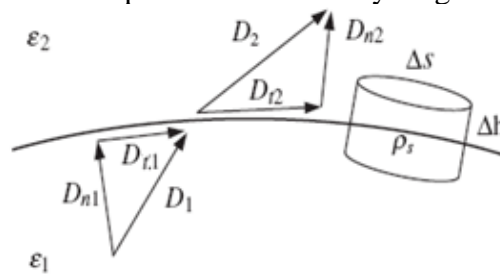


Figura 4

De forma similar, analizando adecuadamente, se demuestra que:

$$D_{n2} - D_{n1} = \rho_s \quad [24]$$

Este resultado muestra que las componentes normales del flujo eléctrico son discontinuas a través del contorno, discontinuidad que viene dada por la densidad superficial de carga en ese punto, ρ_s .

Ahora bien, tomando como base las ecuaciones [23] y [24] se pueden determinar las propiedades de la refracción eléctrica. La figura 5 muestra una superficie que divide dos dieléctricos (con ϵ_1 y ϵ_2), E_1 y D_1 están inclinadas θ_1 con respecto a la normal; E_2 y D_2 los están θ_2 .

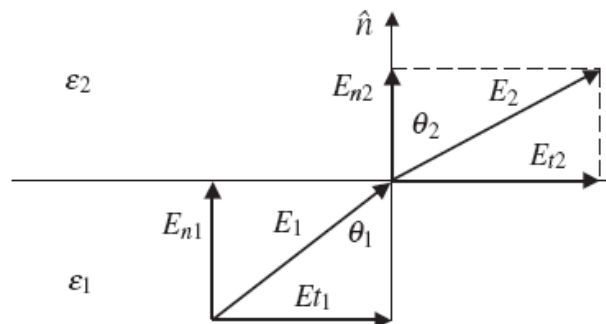


Figura 5

De esta forma, y asumiendo que la diferencia superficial de carga entre las dos superficies, ρ_s , es cero, se llegan a las siguientes relaciones:

$$E_1 \text{sen} \theta_1 = E_2 \text{sen} \theta_2 \quad [25]$$

$$\epsilon_1 E_1 \text{cos} \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \text{cos} \theta_2 \quad [26]$$

Al dividir ambos resultados y luego de algunas transformaciones matemáticas, se obtiene la relación entre los ángulos de refracción del campo eléctrico en ambos medios:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \quad [27]$$

Condiciones de contorno del campo magnético

En este caso, las dos ecuaciones de Maxwell de utilidad, también en forma integral, a la hora de establecer las condiciones de contorno para el campo magnético (las tangenciales H_t , y las normales B_n , respectivamente), son (Gross, 2005):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad [28]$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad [29]$$

Las figuras 6 y 7 muestran el contorno entre dos medios (con μ_1 y μ_2) y las correspondientes componentes tangenciales y normales del campo magnético H y de la densidad del flujo magnético B , respectivamente:

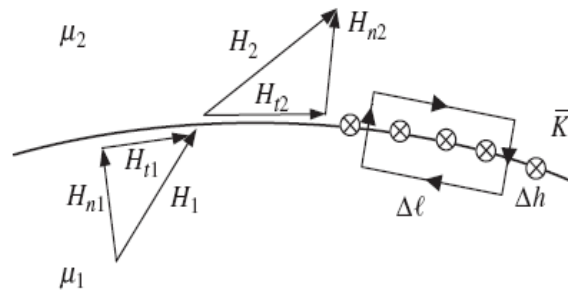


Figura 6

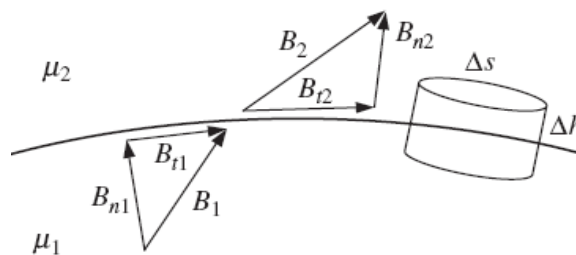


Figura 7

Analizando y trabajando adecuadamente en las dos situaciones, se puede arribar a los resultados siguientes:

$$H_{t1} - H_{t2} = K \quad [30]$$

$$B_{n2} = B_{n1} \quad [31]$$

La ecuación [30] muestra que la componente tangencial del campo magnético es discontinua a través del contorno entre los medios, discontinuidad que viene dada por la densidad superficial de corriente K . A su vez, la ecuación [31] nos dice que la componente normal de la densidad del flujo magnético es continua a través del contorno.

Ahora bien, tomando como base las ecuaciones [30] y [31], y de forma análoga a lo desarrollado en la sección anterior, se pueden determinar las propiedades de la refracción magnética. Si se asume, en este caso, que la diferencia superficial de corriente entre las dos superficies, K , es cero, se llega a la ecuación:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \quad [32]$$

Coefficientes de transmisión y reflexión de ondas planas

Como bien fue mencionado en secciones anteriores, algunos de los fenómenos a que están expuestas las ondas en su trayectoria de propagación, son la reflexión, transmisión y difracción. A continuación se muestran los coeficientes de transmisión y reflexión de ondas planas, en los casos de incidencia normal y oblicua. Los detalles de estas derivaciones, pueden ser hallados en (Sadiku, 2001).

El caso de la incidencia normal, en el cual la onda plana incide normal al contorno, es el más simple. En la figura 8 se puede apreciar la situación ilustrativa de este caso:

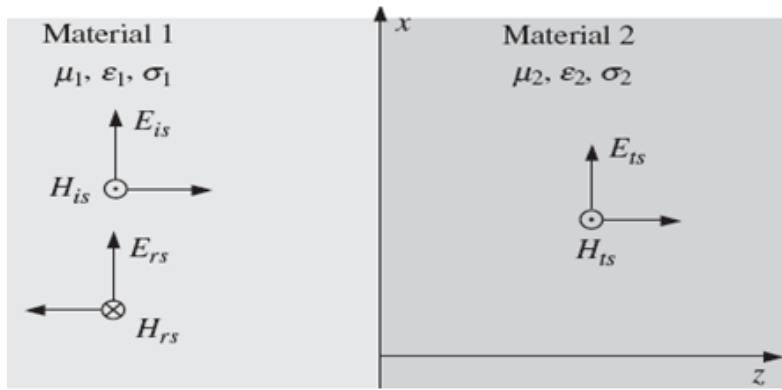


Figura 8

La impedancia intrínseca de ambos medios, viene dada por:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1} \frac{1}{1 - j\frac{\sigma_1}{\omega\epsilon_1}}} \quad [33]$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2} \frac{1}{1 - j\frac{\sigma_2}{\omega\epsilon_2}}} \quad [34]$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión, se definen, respectivamente, como se muestra a continuación:

$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |R|e^{j\theta_R} \quad [35]$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = |T|e^{j\theta_T} \quad [36]$$

De esta forma, el campo eléctrico total, en ambas regiones, se define:

$$\overline{E}_{1s} = \overline{E}_{is} + \overline{E}_{rs} = E_{i0}[e^{-\gamma_1 z} + R e^{\gamma_1 z}] \hat{x} \quad [37]$$

$$\overline{E}_{2s} = T E_0 e^{-\gamma_2 z} \hat{x} \quad [38]$$

En los casos en los que el coeficiente de reflexión no es cero (es decir, existe onda reflejada) y la región 1 se considera sin pérdidas ($\sigma_1=0$), se establece un patrón de onda mezclada, que conlleva a un patrón de interferencia, el que será una función de la distancia del contorno. Esta interferencia es un ejemplo trivial del desvanecimiento que tiene lugar en muchas aplicaciones inalámbricas. Luego, resulta de interés definir dicho patrón de onda estacionaria, tal y como se muestra (Gross, 2005):

$$SWR = \frac{(1 + |R|)}{(1 - |R|)} \quad [39]$$

Pasando al caso de la incidencia oblicua, se debe decir que resulta mucho más complejo que el de la incidencia normal a la hora de definir los coeficientes de reflexión y transmisión, que en esta situación se les conoce como Coeficientes de Fresnel (Gross, 2005). Al igual que en la sección anterior, los detalles de la obtención de estos resultados pueden ser consultados en (Sadiku, 2001). Serán abordados dos casos principales, uno donde el campo E es paralelo al plano de incidencia, y otro en el que dicho campo es perpendicular.

Para el caso particular en el que el campo es paralelo al plano de incidencia, la figura 9, apoya el análisis. La misma muestra que el campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia y-z. Los ángulos θ_i , θ_r y θ_t , constituyen los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión, respectivamente.

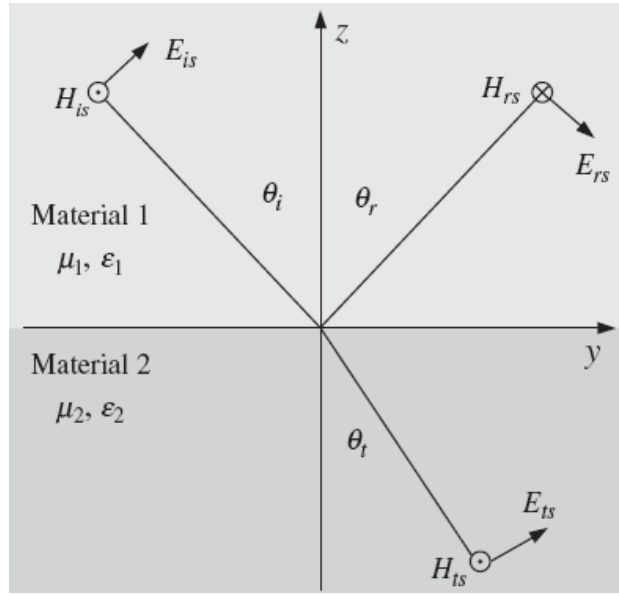


Figura 9

Los coeficientes de reflexión y de transmisión, se definen a continuación:

$$R_{||} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad [40]$$

$$T_{||} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad [41]$$

En ambas expresiones anteriores, el término θ_t puede ser hallado como:

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \text{sen}^2 \theta_i} \quad [42]$$

Para el caso particular en el que el campo es perpendicular al plano de incidencia, la figura 10, apoya el análisis. La misma muestra que el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia y-z. Los ángulos θ_i , θ_r y θ_t , y constituyen los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión, respectivamente.

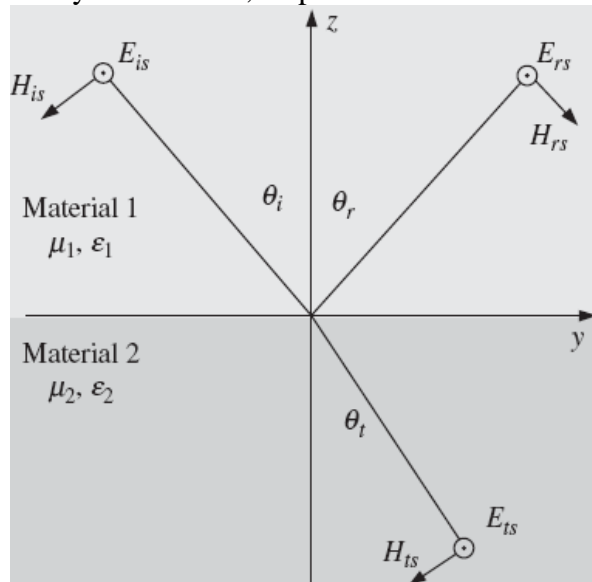


Figura 10

Los coeficientes de reflexión y transmisión en este caso, vienen expresados respectivamente, como:

$$R_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad [43]$$

$$T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \quad [44]$$

Propagación sobre tierra plana

Cuando la longitud de la trayectoria de propagación es relativamente corta, se puede despreciar la curvatura de la superficie terrestre y, en este caso, el problema se reduce a analizar la propagación sobre una superficie plana. Esta sección deviene en un importante inicio para entender los problemas generales de la propagación multitrayecto, debido a que el modelo de la tierra plana permite introducir una trayectoria indirecta. Esta segunda trayectoria producirá interferencia en el receptor (Gross, 2005).

La figura 11 representa el modelo de la tierra plana, con dos antenas isotrópicas (una en régimen de transmisión y la otra en el de recepción) elevadas sobre el suelo (h_1 y h_2) y separadas una distancia d . R es el coeficiente de reflexión de la superficie de la tierra en el punto y .

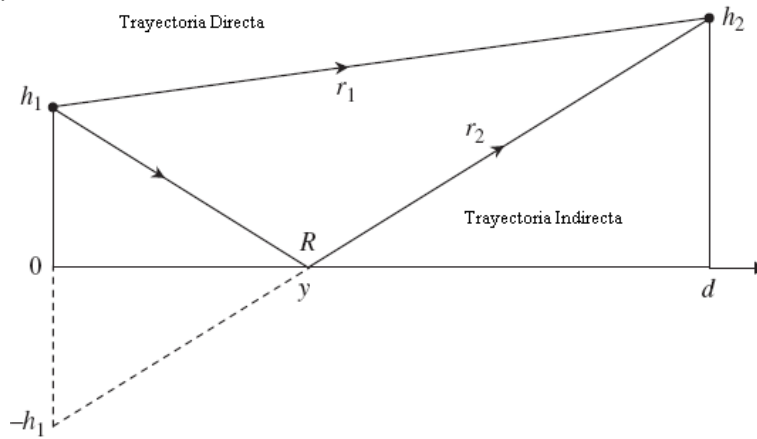


Figura 11

La señal que llega al receptor está compuesta por el rayo directo y el reflejado en el punto y . La siguiente ecuación, así lo representa:

$$\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} + R \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} \quad [45]$$

donde: k es el número de onda, y viene dado por $\omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda$;

$$R = |e^{-j\psi}|; \quad [46]$$

$$r_1 = \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2} \quad [46]$$

$$r_2 = \sqrt{d^2 + (h_2 + h_1)^2} \quad [47]$$

El factor de ganancia del trayecto, se define como (Bertoni, 2000):

$$F = \left| 1 + R \frac{r_1}{r_2} e^{-jk(r_2 - r_1)} \right| \quad [48]$$

Si se asume que, las alturas de las antenas $h_1, h_2 \ll r_1, r_2$, la diferencia en las trayectorias se puede hallar por medio de:

$$r_2 - r_1 = \frac{2h_1 h_2}{d} \quad [49]$$

También, en el caso de largas distancias, se puede asumir que $r_1/r_2 = 1$ y que $R = -1$, por lo que [48] toma la forma siguiente (Bertoni, 2000):

$$F = 2 \left| \text{sen} \frac{kh_1 h_2}{d} \right| = 2 \left| \text{sen} \frac{2\pi h_1 h_2}{d \lambda} \right| \quad [50]$$

Difracción por borde afilado

Se ha planteado cómo pueden producirse trayectorias adicionales por reflexión en la superficie terrestre. Además de este elemento, nuevas trayectorias se originan debido a la difracción producto de montañas, edificios, etc., los cuales puede que no estén en la posición específica como para dar lugar a reflexiones, pero sí para provocar difracción (Gross, 2005). La figura 12 ilustra cómo una montaña de altura h , se encuentra ubicada entre dos antenas (una en régimen de transmisión y la otra en recepción) de alturas h_1 y h_2 , respectivamente.

Se asume que el tope de la montaña no produce reflexión, así como también que la montaña bloquea cualquier reflexión desde el suelo hasta la antena receptora, por lo que el campo recibido estará expresado sólo en términos de la trayectoria directa y de la difractada. h_c es la “altura de claridad” entre el borde afilado y la trayectoria directa. En los casos en los que $h_c < 0$, el borde afilado estará por debajo de la línea de visibilidad directa, y, en consecuencia existirán dos trayectorias de propagación, como se muestra en la figura 12. Ahora bien, si $h_c > 0$, el borde o tope de la montaña obstruye la trayectoria directa, por lo que sólo se recibirá la trayectoria producto de la difracción. Cuando esto sucede, se dice que la antena receptora está en la “región oscura”.

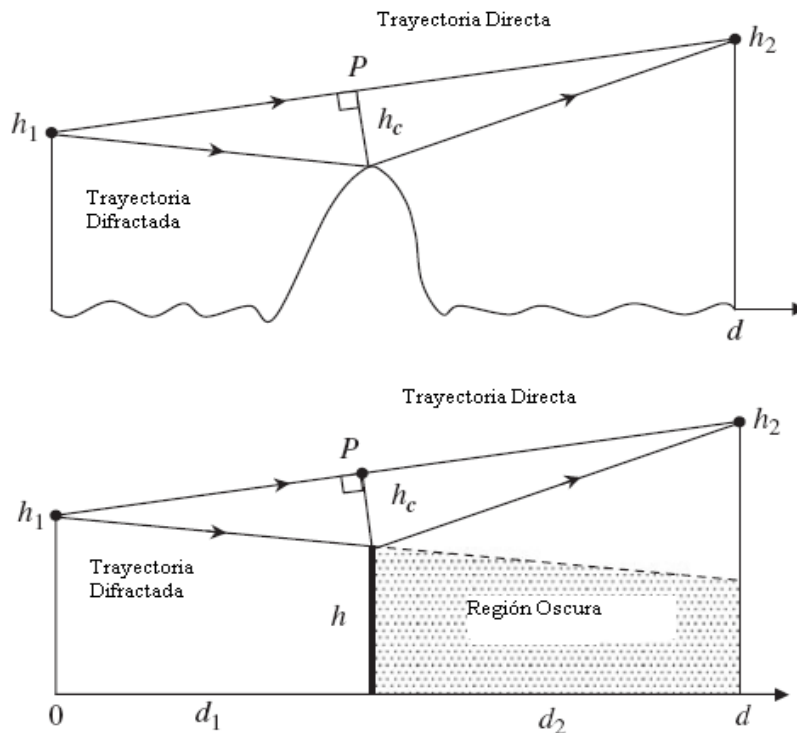


Figura 12

El factor de ganancia del trayecto, producto de la difracción, viene dado por la siguiente expresión (Collin, 1985):

$$F_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \int_{-H_c}^{\infty} e^{-j\pi u^2/2} du \right| \quad [51]$$

donde $H_c \approx h_c \sqrt{\frac{2d}{\lambda d_1 d_2}}$ [52]

Conclusiones

A modo de conclusiones es válido apuntar que la presente monografía recoge de modo claro y sencillo los fundamentos matemáticos que son necesarios tomar en consideración si se quiere entender cómo se producen los fenómenos inherentes a la propagación de las ondas electromagnéticas. En este sentido, se enunciaron las ecuaciones de Maxwell, base imprescindible que sustenta todo el análisis, así como se analizaron las particularidades de la propagación representada en coordenadas rectangulares y esféricas, las condiciones de contorno y los coeficientes de transmisión y reflexión. Por último, fueron incluidos los temas de la propagación sobre tierra plana y de la difracción por borde afilado, pues brindan un acercamiento a las condiciones reales en las que se produce la propagación de las ondas electromagnéticas entre dos puntos.

Bibliografía

Gross, Frank, 2005. *Smart Antennas for Wireless Communications*, McGraw-Hill, New York, (USA).

Ortega Breto, Justo, 1990. *Electromagnetismo, oscilaciones y ondas. Parte teórica*, Ediciones ENPES, La Habana, (Cuba).

Sadiku, M.N.O, 2001. *Elements of Electromagnetics*, 3rd ed., Oxford University Press, Oxford, (Reino Unido).

Hayt, W.H., Jr., y J.A. Buck, 2001. *Engineering Electromagnetics*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, (USA).

Bertoni, H., 2000. *Radio Propagation for Modern Wireless Systems*, Prentice Hall, New York, (USA).

Collin, R.E., 1985. *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill, New York, (USA).