LAS DIFERENCIAS FINITAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Dr. C. Reinaldo Hernández Camacho[1], MsC. Adriana Delgado Landa[1], Mayté Reyna Hernández[1].

1. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Vía Blanca Km.3, Matanzas, Cuba.

Resumen.

En situaciones relacionadas con aspectos de la vida diaria es muy frecuente encontramos con problemas que pueden y deben ser expresados a través de una relación funcional entre dos variables, donde la variable independiente que se adopta, toma valores en un conjunto discreto, ordenado y cuyos elementos están uniformemente espaciados. Este tipo de variable suele ser, frecuentemente, el tiempo. Para modelar matemáticamente estos tipos de problemas, donde la variable independiente es discreta, suelen ser muy efectivos los contenidos de Diferencias Finitas; en particular, las Integrales Finitas, las Ecuaciones en Diferencias Finitas y los métodos de Interpolación de Newton con diferencias finitas y diferencias divididas. En el presente trabajo se pretende mostrar las aplicaciones prácticas de las Integrales Finitas y las Ecuaciones en Diferencias Finitas en la solución de problemas que están asociados con funciones de variables discretas

***Palabras claves**: Diferencias finitas; solución de problemas.*

Introducción.

Para profesionales en ciencias económicas puede ser de interés analizar el comportamiento de la producción diaria de una fábrica, los gastos de una empresa mensualmente, el costo por peso de producción de una cooperativa al final de cada año, o estudiar el crecimiento de la población de un país a través de los censos de población que se efectúan, por lo general, cada 10 años.

Para el estudio de cualesquiera de estos aspectos podemos partir de un período de tiempo inicial t = 0; el período siguiente será t = l, y así sucesivamente. De manera que nos permita conocer la variación que experimenta la función que es objeto de estudio en la medida en que se adopten valores consecutivos de la variable independiente. El objetivo del trabajo es mostrar la aplicación práctica de las Integrales Finitas y las Ecuaciones en Diferencias Finitas en la solución de problemas asociados con funciones de variables discretas.

Desarrollo.

Comenzaremos mostrando ejemplos de problemas que puedan ser modelados mediante la utilización de las Integrales Finitas y posteriormente ejemplificaremos en la utilización de las Ecuaciones en Diferencias Finitas para el mismo propósito de modelación de problemas.

Vamos a presentar los contenidos matemáticos mínimos que resultarán necesarios. Los lectores interesados en profundizar en este tema pueden consultar el libro: “Las Diferencias Finitas y sus Aplicaciones”, (en proceso) de los propios autores.

Comenzamos presentando un teorema, relativamente simple, que permite calcular la suma de los primeros términos de una serie, e inclusive, calcular de manera exacta la suma de muchas series; aspecto este último, que no puede realizarse con los contenidos que tradicionalmente se estudian en las Universidades con relación a la convergencia de las series numéricas.

Teorema fundamental del cálculo de una suma (Hernández et.al , 2010).

Si f(x) es una función definida para $x = a$, $x = a+1$, $x = a+2$,…, $x = a+n$

y $F(x) = \Delta^{-1} f(x)$ para h = 1. Entonces:

$$\sum_{x=a}^{a+n-1} f(x) = \Delta^{-1} f(x)\Big|_a^{a+n} = F(x)\Big|_a^{a+n} = F(a+n) - F(a)$$

1) Ejemplos de aplicación del teorema en ejercicios simples de sumas.

a) Calcular la siguiente suma:

S = $1(2) + 2(3) + 3(4) + ... + 18(19)$

Solución:

$$S = \sum_{x=2}^{19} x(x-1) = \sum_{x=2}^{19} x^{(2)} = \left.\frac{x^{(3)}}{3}\right|_2^{20} = \left.\frac{x(x-1)(x-2}{3}\right|_2^{20} = \frac{20(19)(18)}{3} = 2280$$

S = 2280

b) Encontrar una expresión general en función de n para la siguiente suma:

S_n = 1 + 3 + 5 + … + (2n − 1)

Solución:

$$S = \sum_{x=1}^{n} 2x-1 = \Delta^{-1}(2x-1)\Big|_1^{n+1} = \left.\frac{2x^{(2)}}{2} - x\right|_1^{n+1} = x(x-1) - x\Big|_1^{n+1}$$

$$S = (n+1)n - (n+1) + 1 = n^2 + n - n - 1 + 1 = n^2$$

S = n^2

c) Encontrar la suma de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9n + 20}$$

Solución:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x+5)(x+4)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x+5)^{(2)}} = \sum_{x=1}^{\infty} (x+3)^{(-2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{x=1}^{n} (x+3)^{(-2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x+3)^{(-1)}}{-1}\Bigg|_1^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{x+4}\Bigg|_1^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9n + 20} = \frac{1}{5}$$

Ejemplos de aplicación del teorema en la solución de problemas que conducen al cálculo de una suma.

a) Una tira de esparadrapo está enrollada en un cilindro de plástico de 1,25 cm de radio exterior. Cada vez que se da una vuelta al cilindro con el esparadrapo, la longitud que se enrolla es aproximadamente equivalente a la de una circunferencia. Estas circunferencias van aumentando su radio. Si el espesor del esparadrapo es de 0,034 cm y el rollo tiene en total 59 vueltas, ¿cuál es la longitud total del rollo?

Solución:

$$L = \sum_{n=1}^{59} 2\pi(1{,}25 + 0{,}034n) = \left[\Delta^{-1}\pi(2{,}5 + 0{,}068n)\right]_1^{60}$$

$$L = \left[\pi(2{,}5n + 0{,}068\frac{n^{(2)}}{2})\right]_1^{60} = \left[\pi(2{,}5n + 0{,}068\frac{n(n-1)}{2})\right]_1^{60}$$

L = π [2,5(60) + 0,034 (60) (59) − 2,5] = π (150 + 120,36 − 2,5)

≈ 3,1416(267,86) ≈ 841,508976

La tira de esparadrapo tiene, aproximadamente, 841,5 centímetros.

b) Una persona ahorra cada mes 50 centavos más que el mes anterior. En 10 años sus ahorros suman 3690 pesos. Determinar lo que ahorró el primer mes.

Solución:

Sea "a" la cantidad de pesos que ahorró la persona el primer mes. Entonces, en los 10 años ahorró:

$$S = \sum_{n=1}^{120} a + 0{,}5(n-1)$$

$$= \Delta^{-1}\left[a + 0{,}5(n-1)\right]_1^{121}$$

$$= \left[an + 0{,}25(n-1)^{(2)}\right]_1^{121}$$

$$= \left[an + 0{,}25(n-1)(n-2)\right]_1^{121}$$

$= 121a + 0{,}25(120)\ (119) - a$

$= 120a + 119(30) = 120a + 3570$

Como esta suma es igual a 3690, se tiene que:

$$120a + 3570 = 3690 \Rightarrow a = \frac{3690 - 3570}{120} \Rightarrow a = 1$$

La persona ahorró 1 peso el primer mes.

c) En una tienda se van a vender 40 artículos manufacturados de un mismo tipo, permitiéndose al comprador elegir el que desee. Previendo que los artículos de más baja calidad irán quedando para el final, se determinó vender los 20 primeros a un precio fijo de 10 pesos cada uno; pero a los últimos 20 se les irá rebajando el precio, de manera que cada uno se venderá en 20 centavos menos que el anterior. ¿Cuál es el importe total de la venta?

Solución:

$$S = 200 + \sum_{x=1}^{20}(10 - 0{,}2x) = 200 + \left[\Delta^{-1}(10 - 0{,}2x)\right]_1^{21}$$

$$= 200 + \left[(10x - \frac{0{,}2(x)^{(2)}}{2})\right]_1^{21} = 200 + \left[(10x - 0{,}1x(x-1))\right]_1^{21}$$

$= 200 + 10(21) - 0{,}1(21)\ (20) - 10(1)$

$= 200 + 210 - 42 - 10 = 358$

El importe total de la venta fue de 358 pesos

d) Expresar el número $1{,}41\bar{6}$ como una fracción de la forma $\frac{a}{b}$, empleando sumas de series.

Solución:

$$1{,}41\bar{6} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \dots$$

$$1{,}41\bar{6} = \frac{141}{100} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{6}{10^k} = \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left[\Delta^{-1} 6(10)^{-k}\right]_3^{n+1}$$

$$= \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left[6(10)^{-k}\left(\frac{10}{1-10}\right)\right]_3^{n+1} = \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left[6(10)^{-k}\left(\frac{10}{-9}\right)\right]_3^{n+1}$$

$$= \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-20}{3}\left(\frac{1}{10^k}\right)\right]_3^{n+1} = \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-20}{3}\left(\frac{1}{10^{n+1}}\right) + \frac{20}{3}\left(\frac{1}{10^3}\right)\right)$$

$$= \frac{141}{100} + \frac{2}{300} = \frac{425}{300} = \frac{17}{12}$$

Ejemplos de aplicaciones de las Ecuaciones en Diferencias Finitas en la Solución de Problemas.

Les mostramos a continuación un resumen del contenido matemático necesario para comprender las resoluciones de los problemas que aparecen más adelante (Hernández et.al , 2010):

Las soluciones de la ecuación en diferencias:

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$$

Están en dependencia de las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + a_1 m + a_2 = 0$

1) $m_1 \neq m_2$. Raíces reales y desiguales.

2) $m_1 = m_2$. Raíces reales e iguales.

3) $m_{1,2} = a \pm bi$. Raíces complejas conjugadas.

Soluciones de la ecuación en diferencias en dependencia de la forma de las soluciones de la ecuación auxiliar.

1) Si $m_1 \neq m_2$. Raíces reales y desiguales.

$$Y_k = C_1 m_1^{\ k} + C_2 m_2^{\ k}$$

2) Si $m_1 = m_2$. Raíces reales e iguales.

$$Y_k = C_1 m_1^{\ k} + C_2 k m_1^{\ k}$$

3) Si $m_{1,2} = a \pm bi$. Raíces complejas conjugadas.

$$Y_k = C_1 r^k \cos(k\varphi + C_2)$$

Donde, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $sen\varphi = \dfrac{b}{r}$

Ejemplos de aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas en la solución de problemas.

a) La población de una ciudad aumenta un 40 % cada 10 años. Si en 1970 tenía 50000 habitantes. ¿Cuál será su población en el 2020?

Solución:

Sea y_k el número de habitantes en el año k, considerando las siguientes relaciones:

k = 0 para 1970, k = 1 para 1980,…, k = 5 para 2020

Entonces:

$y_{k+1} = 1,4\, y_k$, $y_0 = 50000$

$y_{k+1} - 1,4\, y_k = 0$

m −1,4 = 0 $\Rightarrow$ m = 1,4

$y_k = C\,(1{,}4)^k$

$y_0 = 50000 \Rightarrow 50000 = C\,(1{,}4)^0 \Rightarrow 5000 = C$. Luego:

$y_k = 50000\,(1{,}4)^k$

$y_5 = 50000\,(1{,}4)^5 = 50000\ (5{,}37824) = 268912$

En el año 2020 la ciudad tendrá 268912 habitantes.

b) Encontrar una función que exprese a cuánto asciende, al término del año k, el capital que va acumulando una persona como consecuencia de haber depositado 200 pesos en un banco a un interés simple anual del 5 %. (Nota: En el caso del interés simple, las ganancias producidas por los intereses se calculan, solamente, en base al capital inicial).

Solución:

Sea y_k el capital acumulado por el hombre al término del año k de haber realizado el depósito.

$y_{k+1} = y_k + \frac{5}{100}(200)$, $y_0 = 200$

$y_{k+1} - y_k = 0{,}05\ (200)$

$y_{k+1} - y_k = 10$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

$Y_k = C$

$y_k^* = a\,k$

$y_{k+1}^* = a\,(k+1)$

Sustituyendo en la tercera ecuación:

$a\,k + a - a\,k = 10 \Rightarrow a = 10$

$y_k^* = 10k$

$y_k = Y_k + y_k^* \Rightarrow y_k = C + 10k$

Aplicando la condición $y_0 = 200$

$200 = C + 10(0) \Rightarrow C = 200$

$y_k = 200 + 10k$

c) De un recipiente que contiene 10 litros de alcohol se saca un litro y se reemplaza con agua. Después se saca un litro de la mezcla y se reemplaza con agua, efectuándose la operación 7 veces en total. ¿Qué cantidad de alcohol queda entonces en el recipiente?

Solución:

Sea y_k la cantidad de alcohol que queda en el recipiente después del reemplazo número k. Entonces:

$$y_{k+1} = \frac{9}{10} y_k \ , \quad y_0 = 10$$

$$y_{k+1} - \frac{9}{10} y_k = 0$$

$m - 0{,}9 = 0 \Rightarrow m = 0{,}9$

$$y_k = C(0{,}9)^k$$

$$y_0 = 10 \Rightarrow C(0{,}9)^0 = 10 \Rightarrow C = 10$$

$$y_k = 10(0{,}9)^k$$

$$y_7 = 10(0{,}9)^7 = 10\ (0{,}4782969)$$

$$y_7 \approx 4{,}783$$

En el recipiente quedan aproximadamente 4,783 litros de alcohol.

d) Un obrero tiene que echar una carretilla de abono al pie de cada árbol, de una fila de 20 árboles, los cuales se encuentran a 6 metros uno de otro. Si la pila de abono está en línea recta con los árboles y a 8 metros delante del primero, ¿cuál es la distancia total que tiene que recorrer el obrero, si al final deja la carretilla junto a la pila de abono?

Solución:

Sea y_k la distancia total que ha recorrido el obrero hasta que le ha echado abono al árbol número k. Entonces:

$y_{k+1} = y_k + 16 + 12k$, $y_1 = 16$

$y_{k+1} - y_k = 12k + 16$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

$Y_k = C$

$y_k^* = ak^2 + bk$

$y_{k+1}^* = a(k+1)^2 + b(k+1)$

Sustituyendo:

$ak^2 + 2ak + a + bk + b - ak^2 - bk = 12k + 16$

$2ak + a + b = 12k + 16$

I) $2a = 12$

II) $a + b = 16$

Resolviendo el sistema se obtiene: $a = 6$, $b = 10$

$y_k^* = 6k^2 + 10k$

$y_k = Y_k + y_k^*$

$y_k = 6k^2 + 10k + C$

Como $y_1 = 16 \Rightarrow 16 = 6 + 10 + C \Rightarrow C = 0$

Entonces: $y_k = 6k^2 + 10k$

Evaluando en k = 20

$y_{20} = 6(20)^2 + 10(20) = 2400 + 200 = 2600$

La distancia total que debe recorrer el obrero es de 2600 metros.

e) Un hombre tomó cierta cantidad de naranjas de un naranjal; pero para salir del campo tuvo que pasar por 7 puntos de control. Cada vez que pasaba por uno de los puntos de control, tenía que dejar la mitad de las naranjas que tuviera en ese momento más media naranja. Al realizar esta operación en los 7 puntos de control, salió con una sola naranja. ¿Cuál fue el número de naranjas que tomó, inicialmente, del naranjal?

Solución:

Sea y_k el número de naranjas con que quedó el hombre después de pasar por el punto de control número k.

$y_{k+1} = \frac{1}{2} y_k - \frac{1}{2}, \quad y_7 = 1$

$y_{k+1} - \frac{1}{2} y_k = -\frac{1}{2}$

$m - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

$Y_k = C\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$y_k^* = a$

$y_{k+1}^* = a$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$a - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -1$$

$$y_k^* = -1$$

$$y_k = Y_k + y_k^* \Rightarrow y_k = C\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1$$

Aplicando la condición $y_7 = 1$

$$1 = C\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1 \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 2 \Rightarrow C = 2.\ 2^7 \Rightarrow C = 256$$

$$y_k = 256\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1$$

El número que se pretende determinar es y_0. Entonces:

$$y_0 = 256\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1 = 256 - 1 = 255$$

El hombre cogió, inicialmente, 255 naranjas.

Conclusiones.

Las Integrales Finitas y las Ecuaciones en Diferencias Finitas tienen una gran aplicación práctica en la solución de problemas que están asociados con funciones de variables discretas.

Lamentablemente las Diferencias Finitas, como rama de la Matemática, que contiene a las Diferencias Finitas propiamente dichas, así como a las integrales finitas y a las ecuaciones en Diferencias Finitas, no suelen formar parte de los programas de estudio de las Carreras de Ingenierías y sólo se estudian en la Licenciatura en Economía. Más inconcebible aún es que no se estudie siquiera en la carrera de Licenciatura en Matemática.

Tal vez algún día se le otorgue a las Diferencias Finitas el lugar y la importancia que merece dentro de la Matemática.

Nuestra opinión es que no tiene aún el lugar que le corresponde, precisamente, por el desconocimiento que una gran parte de los matemáticos tienen con relación a esta rama de nuestra ciencia.

Bibliografía.

Hernández, et.al., 2010. Las diferencias finitas y sus aplicaciones. (en proceso), p.53-95.