EL CONCEPTO FUNCION: IMPRESCINDIBLE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MSc. Orlando Mosquera Hernández, Lic. Marilú Jorge Martín, Yenlis Leal Gómez

Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Vía Blanca
Km.3, Matanzas, Cuba.

CD de Monografías 2011

Resumen.

Desde edades muy tempranas los escolares cubanos se familiarizan con el concepto de función. Este trabajo inicia en las vías no formales y en la medida que va transcurriendo por los diferentes grados, va creciendo su caudal de conocimientos. En la nivel de secundaria básica recibe el concepto de función y comienza a resolver problemas de la vida práctica que se modelan haciendo uso de este. En el nivel preuniversitario se profundiza en el estudio de las funciones y su representación gráfica, pero con frecuencia se observa la no identificación del concepto de función. Para los autores de este trabajo dentro de las causas puede encontrarse la no utilización de ejercicios de reconocimiento y de identificación, en ocasiones por la escasez de tiempo para el desarrollo de estas habilidades, en otras, por la escasez de ejercicios y en otras, que son las menores, por la falta de conocimientos y de experiencias en el trabajo con los programas de estudio en cada uno de los niveles de enseñanza. Al llegar a la universidad el problema persiste y se acentúa. En este trabajo se valoran los principales elementos a tener en cuenta para solventar las dificultades que se presentan con el reconocimiento del concepto función desde los diferentes niveles de enseñanza y en la universidad al trabajar el cálculo diferencial e integral en la carrera de Ingeniería Industrial.
Palabras claves: *concepto de función, enseñanza, cálculo diferencial e integral*

INTRODUCCION

La capacitación del hombre para la solución de problemas es un punto muy discutido en el mundo pues se considera una actividad de gran importancia en la enseñanza; esta caracteriza a una de las conductas más inteligentes del hombre y que más utilidad práctica tiene, ya que la vida misma obliga a resolver problemas continuamente. Estos problemas se presentan en el lenguaje cotidiano y al expresarlos en el lenguaje matemático, en muchas ocasiones deben ser usadas *funciones.* El no reconocimiento de este concepto lleva a serios errores en el modelo y por consiguiente en la respuesta al problema planteado.

En este sentido se comprende, cada vez con más claridad, que no se trata de que en la escuela se depositen contenidos en los alumnos como si se trataran de recipientes, sino de desarrollar sus capacidades para enfrentarlos al mundo y, en particular, enseñarlos a aprender.

En el caso de la matemática, el desarrollo de las técnicas de cómputo coloca en primer plano la capacidad de usarla y no la asimilación de conocimientos, y esa utilización consiste, esencialmente, en la resolución de problemas.

Por esta razón, la capacidad de resolución de problemas se ha convertido en el centro de la enseñanza de la matemática en la época actual, por lo que es necesario contar con una concepción de su enseñanza que ponga en primer lugar la capacidad de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento lógico, pero junto a esto debe estar el tratamiento de las funciones y su presencia en todo lo que nos rodea. A partir de estas ideas centrales es que debe ser determinado el contenido, los métodos, los medios, los procedimientos, las reglas, y las estrategias de enseñanza.

En este trabajo se valoran los principales elementos a tener en cuenta para solventar las dificultades que se presentan con el reconocimiento del concepto función en los estudiantes en los diferentes niveles de enseñanza y que llega hasta la universidad y se muestra a través de un ejemplo, que los autores proponen para alumnos de concurso, el modo de actuación para el trabajo en este sentido, pero que estas dificultades serían comunes para cualquiera fuera el alumno.

Desde edades muy tempranas los escolares cubanos se familiarizan con el concepto de función. Este trabajo inicia en las vías no formales y en la medida que va transcurriendo por los diferentes grados, va creciendo su caudal de conocimientos.

En la Secundaria Básica el alumno recibe el concepto de función y comienza a resolver problemas de la vida práctica que se modelan haciendo uso de este.

En el Preuniversitario el estudiante profundiza en el estudio de las funciones y su representación gráfica, pero con frecuencia se observa la no identificación del concepto de función. Para los autores de este trabajo dentro de las causas puede encontrarse la no utilización de ejercicios de reconocimiento y de identificación, en ocasiones por la escasez de tiempo para el desarrollo de estas habilidades, en otras, por la escasez de ejercicios y en otras, que son las menores, por la falta de conocimientos y de experiencias en el trabajo con los programas de estudio en cada uno de los niveles de enseñanza.

DESARROLLO

Una de las dificultades más significativas en la formación matemática de los alumnos de la enseñanza general, politécnica y laboral de la provincia Matanzas y del país, es su pobre preparación para enfrentar la resolución de ejercicios de aplicación, particularmente aquellos que constituyen problemas y si en ellos está la presencia de funciones aún mucho más.

La constatación realizada, a través de diferentes comprobaciones realizadas ya sean municipales, provinciales o nacionales a los alumnos de la enseñanza media y media superior, ha servido para corroborar la dificultad señalada, detectándose las serias limitaciones para la búsqueda de una vía de solución de cualquier tipo de ejercicio y principalmente la pobre preparación para argumentar y llegar a conclusiones como resultado de la idea de la solución escogida, unido al hecho de que el desarrollo de las habilidades matemáticas no alcanzan el nivel de fijación y sistematización que satisfaga los objetivos de los programas de enseñanza.

El estudio de las dificultades detectadas ha promovido la necesidad de valorar la naturaleza de las causas de que tanto los profesores como los alumnos no alcancen resultados favorables en su nivel de formación para la resolución de problemas.

El estudio en lo que se refiere al tratamiento de los ejercicios, ha arrojado como conclusión: las grandes posibilidades para la estructuración del proceso de solución según las concepciones de Werner Jungk, Wolfgang Zillmer y George Polya, entre otras y que son las más difundidas en el país; en ellas se describen de una manera muy práctica los procesos heurísticos que transcurren durante la búsqueda de la idea de la solución y la solución en sí, pero con la característica de que conciben el tratamiento de cada tipo de ejercicio, según el esquema heurístico propuesto.[1]

Esto significa que el profesor prepara para cada tipo de ejercicio cómo proceder en el tratamiento de su solución, teniendo en cuenta si es un ejercicio formal o con texto, de demostración, de cálculo, construcción u otro.

No obstante, la Metodología no se ocupa plenamente de cómo estructurar los diferentes niveles de organización de un curso (unidades temáticas, sistemas de clases y clases) que garantice un tratamiento sistemático y con una adecuada integración de los modos de actuación que deben asimilar los alumnos, es decir, estructurar los sistemas de clases, unidades temáticas y cursos a partir de la determinación de los modos de actuar, los métodos o estrategias de trabajo (habilidades más generales) y los procedimientos matemáticos en los que el profesor y los alumnos deben concentrar la mayor atención.[2]

En tal sentido, el estudio de complejos de materia ayuda en la comprensión de las líneas directrices del programa, pero no concretan la labor de planificación y dirección que realiza el profesor en la escuela y que se corresponden con los documentos de la planificación (programas, libros de textos y orientaciones metodológicas) que precisan la información en estos niveles de organización.[3]

Un rasgo de la planificación y dosificación es que la resolución de problemas y de los ejercicios integradores del contenido estudiado aparece, generalmente, al finalizar los sistemas de clases y unidades temáticas[4]. De esta forma, el tiempo de que el alumno dispone para entrenarse en esta actividad de forma independiente tiende a ser mínimo, lo que conduce a pensar que no tiene suficiente oportunidad para su fijación y aplicación.

Una variación de esta concepción debe propiciar que la ejercitación, la profundización, sistematización y aplicación constituyan realmente momentos que propicien que la asimilación de los conocimientos y las habilidades matemáticas, se logre de forma integrada, desde el principio, a partir del objetivo a que se aspira (resolución de problemas) que permita formar en el alumno el modo de actuación frente a una determinada situación problemática.

Para la resolución de ejercicios matemáticos hace falta un sistema de conocimientos activos, integrados, utilizables; sin embargo, la forma en que se planifican y dosifican los contenidos, según se señala, puede ser una causa de que no se logre una adecuada

---

[1] Schoenfeld, A. H. 1985. Mathematical Problem Solving; Academic Press. p .44

[2] Campistrous, L. Y Rizo C. 1996. Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. P. I-IX

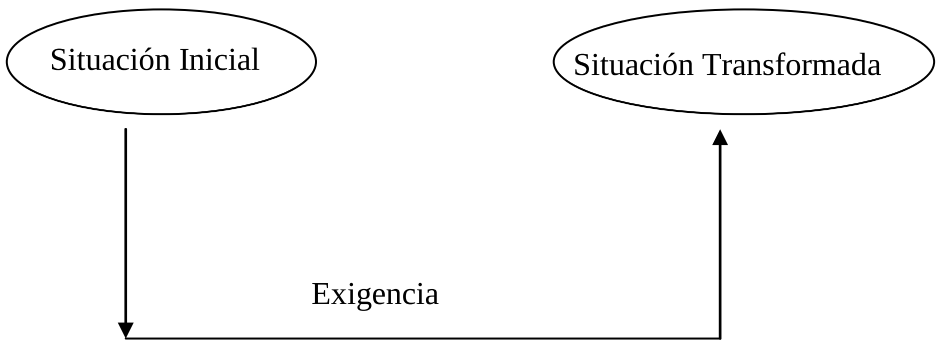
[3] Danilov, M. A. y Skatkin: M. N. 1978. Didáctica de la escuela media. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. p. 186

[4] Campistrous Pérez, Luís y. Rizo. C. 1999. Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos. Curso Pre - reunión Pedagogía '99

asimilación de su sistema de conocimientos y habilidades, teniendo en cuenta que una posición consciente hacia la solución de los ejercicios depende en alto grado de la capacidad del alumno para seleccionar y reestructurar los conocimientos y métodos necesarios.[5]

El análisis que se realiza del concepto de función tendrá en cuenta como cuestión central la permanencia estructurada de los conocimientos y las habilidades, desde el inicio, tomando como unidad organizativa la unidad temática; además de lograr que el alumno sea capaz de meditar y reflexionar alrededor de su propia actividad dirigida en lo fundamental hacia la resolución de problemas matemáticos.

En la literatura existen diversas acepciones del concepto de problema, atendiendo cada una a diferentes puntos de vista. En este trabajo se asume como concepto problema *a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo.*



La vía para pasar de situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema.

En la investigación que se desarrolla como parte del proyecto de investigación: La formación en Educación Matemática de los profesionales del territorio, se analizan algunas de las dificultades que presentan los estudiantes de la enseñanza media y media superior para la resolución de problemas, las cuales son comunes en los estudiantes que se preparan para participar en concursos de conocimientos. Estas han sido detectadas a través de los diferentes muestreos de los concursos ya realizados y que están focalizadas en la resolución de problemas debido a la no identificación del concepto de función.

Desde edades muy tempranas el niño se ha familiarizado con las correspondencias; así por ejemplo, reconoce que a cada persona corresponde una madre, que a cada polígono corresponde un área, etc. Pero no conoce la importancia que tienen las correspondencias en las matemáticas; para ello, basta señalar que con ayuda de estas se puede definir uno de los conceptos más importantes de dicha ciencia, el concepto de función.

---

[5] Valdivia, M. 2009. Una estrategia didáctica para la dirección del aprendizaje de los procedimientos heurísticos en la asignatura matemática y su metodología i de la licenciatura en educación en el área de ciencias exactas. Tesis en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. La Habana. Cuba.

Este concepto está implícito en las matemáticas desde las primeras civilizaciones y ello puede inferirse del estudio de las tablillas de barro babilónicas de la colección Plimpton, que datan del año 1900 a.n.e.

"El concepto de dependencia funcional se expresó inicialmente a través de la representación en una tabla numérica de la variación de los parámetros que determinaban un lugar geométrico".

Las necesidades de la práctica propiciaron el surgimiento de los medios necesarios para expresar una función matemática. Fue Descartes el que posibilitó, con la introducción del concepto "cantidad variable", que en el siglo XVII se pudiera llegar a representar dependencias funcionales a través de gráficas y de fórmulas analíticas. Los nombres de B. Bolzano, N. Lobachevski y P.G. Dirichlet aparecen relacionados con la definición de función como correspondencia de índole completamente general.

Sin embargo, la palabra función no surge hasta que el matemático alemán W.G.Leibniz (1646-1716) la utiliza en el 1694 para designar la dependencia entre los valores de las abscisas y los puntos de la representación gráfica.

El estudio de las funciones matemáticas constituye tema obligado en el currículo de la formación general de cualquier país . En Cuba se abordan como parte de la línea directriz "Correspondencia, transformación, función", la cual transcurre a lo largo de toda la enseñanza. El concepto de función se prepara a largo plazo, comenzando con la comprensión por parte de los alumnos de las ideas del concepto de correspondencia y no es hasta la enseñanza media en que se concluye la etapa propedéutica en la formación del concepto , se define función como correspondencia entre dos conjuntos y se profundiza, al definirla como conjunto de pares ordenados y mediante el trabajo con las diferentes clases de funciones. El estudio de la diferenciación, integración, series, ecuaciones diferenciales y otros temas relacionados con las funciones le corresponde a la Educación Superior.

En la primaria aprenden que a cada número natural le corresponde exactamente un punto en el rayo numérico, que a cada figura o cuerpo geométrico le corresponde un área y un volumen determinado mediante una fórmula.

Ya en séptimo grado se sistematizan y profundizan estas ideas, al aprender que a cada número real corresponde un único punto en la recta numérica, un único opuesto, un único recíproco si es distinto de cero, etc. En este grado ya él conoce relaciones de la física que representan funciones, como por ejemplo s=v.t; donde la variable s representa el desplazamiento, v representa la velocidad, y t representa el tiempo.

Es en octavo grado donde por primera vez se le da el concepto de función lo que constituye la base fundamental para las funciones elementales, se comienza a tratar las funciones lineales y se continúa en noveno con el estudio de las funciones cuadráticas.

En décimo grado profundizan al definir éste como un conjunto de pares ordenados y estudiar las funciones modulares, radicales e inversas de forma mucho más profunda. Es entonces en undécimo grado donde se concluye su estudio al trabajar las funciones logarítmicas y exponenciales así como las trigonométricas.

Pero a pesar de todo el trabajo que se ha ido desarrollando con los estudiantes desde los primeros años de su vida, aún el alumno no domina correctamente el concepto de función. El alumno que se ha estado preparando para participar en concursos es atendido de forma diferenciada donde se le profundiza mucho más su contenido a través de ejercicios de reconocimiento, identificación, fijación, reproducción y aplicación.

El tratamiento de las funciones en la escuela cubana (incluyendo alumnos de alto rendimiento) está encaminado a la comprensión del concepto de función como correspondencia entre dos conjuntos y como conjunto de pares ordenados, a sus diferentes formas de representación, al desarrollo de habilidades en su representación gráfica y al dominio de propiedades y la relación entre el gráfico y dichas propiedades, y a la resolución de problemas vinculados con la vida práctica. Uno de los problemas fundamentales que se presentan es el relacionado con la graficación. En este último aspecto influye desfavorablemente la utilización de medios de enseñanza e instrumentos de dibujo que no propician el trabajo con la celeridad y exactitud necesarias.

Una vez que el alumno domina el concepto de función es capaz de enfrentarse a la modelación de la situación que se describe, llegando así a las ecuaciones que brinda el problema planteado, resolver la ecuación o el sistema de ecuaciones que resulte de la traducción del texto al lenguaje algebraico, que geométricamente no es más que la intersección de los gráficos de las funciones, puesto que la gran parte de ellos se resuelven haciendo uso de las funciones y un ejemplo de ello pudiera ser el siguiente problema.

“La hierba crece en todo el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días, y 30, en 60 días. ¿Cuántas vacas se la comerían en 96 días?”

El estudiante razona muy “rápido”, teniendo en cuenta que es el número de vacas y dice.

$$\left.\begin{array}{l} 70 \to 24 \\ . \\ y \to 96 \end{array}\right\}$$

Este es su primer impulso y para él está claro que es de proporcionalidad inversa porque a mayor cantidad de vacas menor cantidad de días, luego nos quedaría

$\frac{y}{70} = \frac{24}{96}$, donde $y = \frac{70.24}{96}$ y se obtiene que hay un primer absurdo porque en este caso $y = \frac{70}{4}$ o $y = 17\, {}^{1}\!/_{2}$, el segundo es todavía más extraño

$$\left.\begin{array}{l} 30 \to 60 \\ \\ \end{array}\right\}$$

$y \rightarrow 96$

de donde $y = \frac{30.60}{96}$ y se obtiene que $y = 18\,{}^{3}\!/_{4}$, pero si el alumno piensa un poquito más en el problema se da cuenta de lo siguiente

Si 70 vacas se comen toda la hierba en 24 días entonces 30 se la comerían en 56 días y no en 60 como dice el texto; pero el profesor tiene que lograr que el alumno razone que no ha tenido en cuenta que la hierba crece en todo momento lo que significa que cuando la vaca come en un lugar y se traslada para otro la hierba se mantiene creciendo por lo que haría falta saber, ¿cuánto crece la hierba en un día?

Llamémosle x al crecimiento de la hierba en el día, luego en 24 días crecerá 24 x

si tomamos como 1 todo el pasto, entonces, en 24 días las vacas comerán 1+24 x

En uno de esos días las vacas comerán $\frac{1+24x}{24}$ y una de las 70 vacas comerá $\frac{1+24x}{24.70}$.

Siguiendo el mismo análisis, si 30 vacas se comen toda la hierba en 60 días, entonces, una de esas vacas comerá $\frac{1+60x}{30.60}$ pero todos sabemos que las vacas comen por igual, por lo tanto $\frac{1+24x}{24.70} = \frac{1+60x}{30.60}$ de donde $x = \frac{1}{480}$, que no es más que el crecimiento de la hierba en un día.

Determinemos lo que come una de esas vacas $\frac{1+24.\frac{1}{480}}{24.70} = \frac{1}{1600}$.

Por último, si y es el número de vacas que se comen toda la hierba en los 96 días entonces una de esas vacas comerá $\frac{1+96\frac{1}{480}}{96y}$ donde esto será $\frac{1}{1600}$ por lo que $\frac{1+96\frac{1}{480}}{96y} = \frac{1}{480}$ de donde se obtiene que $y = 20$ luego 20 vacas se comerían toda la hierba en 96 días.

Pero si el alumno hubiese identificado el concepto de función, y además, que es de proporcionalidad inversa puesto que mientras mayor sea el número de vacas menor será el número de días que demorarán para consumir toda la hierba a pesar de que ésta crece constantemente en todo el prado por lo que es evidente que existe un incremento, que en este caso es el crecimiento de la hierba, entonces la función sería $y=\frac{m}{x}+n$ donde sería muy sencillo el siguiente planteamiento

$$\begin{cases} 70=\frac{m}{24}+n \\ 30=\frac{m}{60}+n \end{cases},$$

al resolver el sistema nos queda m=1600 y n=$\frac{10}{3}$, pero siendo y el número de vacas que se comen la hierba en los 96 días, la ecuación resultante será $y=\frac{m}{96}+n$, pero como tenemos hallados los valores de m y de n los podemos sustituir y nos quedaría $y=\frac{1600}{96}+\frac{10}{3}$, donde está claro que y =20.

La vía para pasar de situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema y en este caso no sucede por lo que se considera problema y por su alto grado de dificultad puede ubicarse dentro de los problemas para entrenamiento a los alumnos de concursos.

Otra vía de solución del problema planteado pudiera ser a través de la representación gráfica de la función de proporcionalidad inversa que contiene a los puntos (70; 24) y (30; 60), una vez hecha la representación gráfica de la función, donde en el eje de las x ubicaríamos la cantidad de días y en el eje de las y ubicaríamos la cantidad de vacas que comen toda la hierba, bastaría con buscar la imagen, ya sea de forma geométrica o analítica para el valor de x=96, donde se tendría la solución esperada, que en este caso será la imagen, pero para esto se requiere de que el alumno domine el concepto de función.

El hecho de que estos estudiantes sean de concurso, no quiere decir que necesariamente van a encontrar la vía de solución al problema de forma inmediata, puesto que es de elevada dificultad, pero con algunos impulsos metodológicos dados por el profesor si llegarán a la vía que encontrará la solución.

CONCLUSIONES

La resolución de problemas constituye uno de los aspectos fundamentales dentro de la matemática, para ello el alumno comienza una gran preparación desde edades muy tempranas, en particular, el estudio de las funciones será la piedra angular dentro de esa importantísima temática que constituye una de las líneas directrices de la matemática, el cual termina al concluir el onceno grado.

Dentro de las dificultades más significativas que presentan los estudiantes se encuentra la no identificación del concepto de función a la hora de resolver un problema y poder plantear las ecuaciones que modelan dichas situaciones, problema este que se presenta por la realización insuficiente de ejercicios de identificación y ejercicios de fijación del concepto.

Bibliografía.

Campistrous, L. Y Rizo C. 1996. Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. P. I-IX

Campistrous Pérez, Luís y. Rizo. C. 1999. Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos. Curso Pre - reunión Pedagogía '99

Danilov, M. A. y Skatkin: M. N. 1978. Didáctica de la escuela media. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. p. 186

Schoenfeld, A. H. 1985. Mathematical Problem Solving; Academic Press. p .44

Valdivia, M. 2009. Una estrategia didáctica para la dirección del aprendizaje de los procedimientos heurísticos en la asignatura matemática y su metodología I de la licenciatura en educación en el área de ciencias exactas. Tesis en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. La Habana. Cuba.