PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS.

Dr.C. Reinaldo Hernández Camacho[1], Lic. Adriana Delgado Landa[1]

1. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Vía Blanca Km.3, Matanzas, Cuba.

Resumen.

En la resolución de problemas pueden emplearse técnicas muy variadas, en dependencia de las características propias del mismo. Poder identificar, por ejemplo, cuándo se puede emplear la integral definida para resolver un problema suele resultar muy conveniente. Las Diferencias Finitas, por su parte, tienen una amplia aplicación en la solución de problemas en los cuales intervienen funciones de variables discretas. Particularmente, en situaciones de índole económica es frecuente que surjan estos tipos de problemas, donde la variable independiente suele ser el tiempo, cuando son estudiados aspectos que se suceden a intervalos de tiempos fijos, como por ejemplo, eventos que pueden ocurrir diariamente, mensualmente, anualmente, etc. Para modelar matemáticamente estos tipos de problemas, suelen ser apropiadas las diferencias finitas, las integrales finitas y las ecuaciones en diferencias finitas.

Palabras claves*: Diferencias finitas; integrales finitas; ecuaciones en diferencias finitas.*

Introducción.

En situaciones relacionadas con aspectos de la vida diaria es muy frecuente encontramos con problemas que pueden y deben ser expresados a través de una relación funcional entre dos variables, donde la variable independiente que se adopta, toma valores en un conjunto discreto, ordenado y cuyos elementos están uniformemente espaciados.

Para modelar matemáticamente estos tipos de problemas, donde la variable independiente es discreta, suelen ser muy efectivos los contenidos de Diferencias Finitas; en particular, las Integrales Finitas, las Ecuaciones en Diferencias Finitas y los métodos de Interpolación de Newton con diferencias finitas y diferencias divididas.

En el presente trabajo se pretende mostrar las experiencias didácticas adquiridas en la enseñanza de estos contenidos matemáticos, en lo relacionado con su aplicación en la solución de problemas.

Desarrollo.

Comenzaremos mostrando ejemplos de problemas que puedan ser modelados mediante la utilización de las Integrales Finitas y posteriormente ejemplificaremos en la utilización de las Ecuaciones en Diferencias Finitas para el mismo propósito de modelación de problemas.

Vamos a presentar los contenidos matemáticos mínimos que resultarán necesarios. Los lectores interesados en profundizar en este tema pueden consultar el libro: "Las Diferencias Finitas y sus Aplicaciones". (Hernández, R. y Delgado, A. 2009).

Comenzamos presentando un teorema, relativamente simple, que permite calcular la suma de los primeros términos de una serie, e inclusive, calcular de manera exacta la suma de muchas series; aspecto este último, que no puede realizarse con los contenidos que tradicionalmente se estudian en las Universidades con relación a la convergencia de las series numéricas.

Teorema fundamental del cálculo de una suma

Si f(x) es una función definida para $x = a$, $x = a+1$, $x = a+2, \ldots,$ $x = a+n$

y $F(x) = \Delta^{-1} f(x)$ para h=1. Entonces:

$$\sum_{x=a}^{a+n-1} f(x) = \Delta^{-1} f(x)\Big|_{a}^{a+n} = F(x)\Big|_{a}^{a+n} = F(a+n) - F(a)$$

Observaciones**:**

-El operador Δ^{-1} representa a la integral finita, que es a su vez el operador inverso de la diferencia finita.

La aplicación de este teorema tiene mucha similitud con la aplicación de las integrales definidas en la solución de problemas. (Hernández, R. 2009)

1) Ejemplos de aplicación del teorema en ejercicios simples de sumas.

a) Calcular la siguiente suma:

$$S = 1(2) + 2(3) + 3(4) + \ldots + 18(19)$$

Solución:

$$S = \sum_{x=2}^{19} x(x-1) = \sum_{x=2}^{19} x^{(2)} = \frac{x^{(3)}}{3}\Bigg|_{2}^{20} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3}\Bigg|_{2}^{20} = \frac{20(19)(18)}{3} = 2280$$

S = 2280

b) Encontrar una expresión general en función de n para la siguiente suma:

$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$

Solución:

$$\mathbf{S} = \sum_{x=1}^{n} 2x - 1 = \Delta^{-1}(2x-1)\Big|_{1}^{n+1} = \frac{2x^{(2)}}{2} - x\Bigg|_{1}^{n+1} = x(x-1) - x\Big|_{1}^{n+1}$$

$$\mathbf{S} = (n+1)n - (n+1) + 1 = n^2 + n - n - 1 + 1 = n^2$$

$$\mathbf{S} = n^2$$

c) Encontrar la suma de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9n + 20}$$

Solución:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x+5)(x+4)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x+5)^{(2)}} = \sum_{x=1}^{\infty} (x+3)^{(-2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{x=1}^{n} (x+3)^{(-2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x+3)^{(-1)}}{-1}\bigg|_{1}^{n+1} = {}^{1} \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{x+4}\bigg|_{1}^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9n + 20} = \frac{1}{5}$$

Ejemplos de aplicación del teorema en la solución de problemas que conducen al cálculo de una suma.

a) Una tira de esparadrapo está enrollada en un cilindro de plástico de 1,25 cm de radio exterior. Cada vez que se da una vuelta al cilindro con el esparadrapo, la longitud que se enrolla es aproximadamente equivalente a la de una circunferencia. Estas circunferencias van aumentando su radio. Si el espesor del esparadrapo es de 0,034 cm y el rollo tiene en total 59 vueltas, ¿cuál es la longitud total del rollo?

Solución:

$$L = \sum_{n=1}^{59} 2\pi(1{,}25 + 0{,}034n) = \left[\Delta^{-1}\pi(2{,}5 + 0{,}068n)\right]_{1}^{60}$$

$$L = \left[\pi(2{,}5n + 0{,}068\frac{n^{(2)}}{2})\right]_{1}^{60} = \left[\pi(2{,}5n + 0{,}068\frac{n(n-1)}{2})\right]_{1}^{60}$$

L = π [2,5(60) + 0,034 (60) (59) − 2,5] = π (150 + 120,36 − 2,5)

≈ 3,1416(267,86) ≈ 841,508976

La tira de esparadrapo tiene, aproximadamente, 841,5 centímetros.

b) Una persona ahorra cada mes 50 centavos más que el mes anterior. En 10 años sus ahorros suman 3690 pesos. Determinar lo que ahorró el primer mes.

Solución:

Sea “a” la cantidad de pesos que ahorró la persona el primer mes. Entonces, en los 10 años ahorró:

$$S = \sum_{n=1}^{120} a + 0{,}5(n-1)$$

$$= \Delta^{-1}\left[a + 0{,}5(n-1)\right]_1^{121}$$

$$= \left[an + 0{,}25(n-1)^{(2)}\right]_1^{121}$$

$$= \left[an + 0{,}25(n-1)(n-2)\right]_1^{121}$$

$= 121a + 0{,}25(120)(119) - a$

$= 120a + 119(30) = 120a + 3570$

Como esta suma es igual a 3690, se tiene que:

$$120a + 3570 = 3690 \Rightarrow a = \frac{3690-3570}{120} \Rightarrow a = 1$$

La persona ahorró 1 peso el primer mes.

c) En una tienda se van a vender 40 artículos manufacturados de un mismo tipo, permitiéndose al comprador elegir el que desee. Previendo que los artículos de más baja calidad irán quedando para el final, se determinó vender los 20 primeros a un precio fijo de 10 pesos cada uno; pero a los últimos 20 se les irá rebajando el precio, de manera que cada uno se venderá en 20 centavos menos que el anterior. ¿Cuál es el importe total de la venta?

Solución:

$$S = 200 + \sum_{x=1}^{20}(10-0{,}2x) = 200 + \left[\Delta^{-1}(10-0{,}2x)\right]_1^{21}$$

$$= 200 + \left[\left(10x - \frac{0{,}2(x)^{(2)}}{2}\right)\right]_1^{21} = 200 + \left[10x - 0{,}1x(x-1)\right]_1^{21}$$

$= 200 + 10(21) - 0{,}1(21)(20) - 10(1)$

$= 200 + 210 - 42 - 10 = 358$

El importe total de la venta fue de 358 pesos

d) Expresar el número $1{,}41\overline{6}$ como una fracción de la forma $\frac{a}{b}$, empleando sumas de series.

Solución:

$$1{,}41\overline{6} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \ldots$$

$$1{,}41\overline{6} = \frac{141}{100} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{6}{10^{k}} = \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left[^{-1} 6(10)^{-k} \right]_{3}^{n+1}$$

$$= \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left[6(10)^{-k} \left(\frac{10}{1-10} \right) \right]_{3}^{n+1} = \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left[6(10)^{-k} \left(\frac{10}{-9} \right) \right]_{3}^{n+1}$$

$$= \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-20}{3} \left(\frac{1}{10^{k}} \right) \right]_{3}^{n+1} = \frac{141}{100} + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-20}{3} \left(\frac{1}{10^{n+1}} \right) + \frac{20}{3} \left(\frac{1}{10^{3}} \right) \right)$$

$$= \frac{141}{100} + \frac{2}{300} = \frac{425}{300} = \frac{17}{12}$$

Ejemplos de aplicaciones de las Ecuaciones en Diferencias Finitas en la Solución de Problemas.

Las soluciones de la ecuación en diferencias:

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$$

Están en dependencia de las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + a_1 m + a_2 = 0$

1) $m_1 \neq m_2$. Raíces reales y desiguales.

2) $m_1 = m_2$. Raíces reales e iguales.

3) $m_{1,2} = a \pm bi$. Raíces complejas conjugadas.

Soluciones de la ecuación en diferencias en dependencia de la forma de las soluciones de la ecuación auxiliar.

1) Si $m_1 \neq m_2$. Raíces reales y desiguales.

$$Y_k = C_1 m_1^{\,k} + C_2 m_2^{\,k}$$

2) Si $m_1 = m_2$. Raíces reales e iguales.

$$Y_k = C_1 m_1^{\,k} + C_2 k m_1^{\,k}$$

3) Si $m_{1,2} = a \pm bi$. Raíces complejas conjugadas.

$$Y_k = C_1 r^k \cos(k\varphi + C_2)$$

Donde, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $sen\varphi = \dfrac{b}{r}$

Ejemplos de aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas en la solución de problemas.

a) La población de una ciudad aumenta un 40 % cada 10 años. Si en 1970 tenía 50000 habitantes. ¿Cuál será su población en el 2020?

Solución:

Sea y_k el número de habitantes en el año k, considerando las siguientes relaciones:

k = 0 para 1970, k = 1 para 1980,…, k = 5 para 2020

Entonces:

y_{k+1} = 1,4 y_k , y_0 = 50000

y_{k+1} −1,4 y_k = 0

m −1,4 = 0 $\Rightarrow$ m = 1,4

y_k = C $(1,4)^k$

y_0 = 50000 $\Rightarrow$ 50000 = C $(1,4)^0$ $\Rightarrow$ 5000 = C. Luego:

y_k = 50000 $(1,4)^k$

y_5 = 50000 $(1,4)^5$ = 50000 (5,37824) = 268912

En el año 2020 la ciudad tendrá 268912 habitantes.

b) Encontrar una función que exprese a cuánto asciende, al término del año k, el capital que va acumulando una persona como consecuencia de haber depositado 200 pesos en un banco a un interés simple anual del 5 %. (Nota: En el caso del interés simple, las ganancias producidas por los intereses se calculan, solamente, en base al capital inicial).

Solución:

Sea y_k el capital acumulado por el hombre al término del año k de haber realizado el depósito.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{5}{100}(200) \quad , \qquad y_0 = 200$$

$$y_{k+1} - y_k = 0{,}05\ (200)$$

$$y_{k+1} - y_k = 10$$

m − 1= 0 ⇒ m = 1

$$Y_k = C$$

$$y_k^* = a\ k$$

$$y_{k+1}^* = a\ (k+1)$$

Sustituyendo en la tercera ecuación:

$$a\ k + a - a\ k = 10 \ \Rightarrow \ a = 10$$

$$y_k^* = 10k$$

$$y_k = Y_k + y_k^* \Rightarrow y_k = C + 10k$$

Aplicando la condición $y_0 = 200$

200 = C +10(0) ⇒ C = 200

$$y_k = 200 + 10k$$

c) De un recipiente que contiene 10 litros de alcohol se saca un litro y se reemplaza con agua. Después se saca un litro de la mezcla y se reemplaza con agua, efectuándose la operación 7 veces en total. ¿Qué cantidad de alcohol queda entonces en el recipiente?

Solución:

Sea y_k la cantidad de alcohol que queda en el recipiente después del reemplazo número k. Entonces:

$$y_{k+1} = \frac{9}{10}\,y_k \;, \quad y_0 = 10$$

$$y_{k+1} - \frac{9}{10}\,y_k = 0$$

m − 0,9 = 0 $\Rightarrow$ m = 0,9

$$y_k = C(0{,}9)^k$$

$$y_0 = 10 \Rightarrow C(0{,}9)^0 = 10 \Rightarrow C = 10$$

$$y_k = 10(0{,}9)^k$$

$$y_7 = 10(0{,}9)^7 = 10\,(0{,}4782969)$$

$$y_7 \approx 4{,}783$$

En el recipiente quedan aproximadamente 4,783 litros de alcohol.

d) Un obrero tiene que echar una carretilla de abono al pie de cada árbol, de una fila de 20 árboles, los cuales se encuentran a 6 metros uno de otro. Si la pila de abono está en línea recta con los árboles y a 8 metros delante del primero, ¿cuál es la distancia total que tiene que recorrer el obrero, si al final deja la carretilla junto a la pila de abono?

Solución:

Sea y_k la distancia total que ha recorrido el obrero hasta que le ha echado abono al árbol número k. Entonces:

$$y_{k+1} = y_k + 16 + 12k \;, \quad y_1 = 16$$

$$y_{k+1} - y_k = 12k + 16$$

m −1 = 0 $\Rightarrow$ m = 1

$$Y_k = C$$

$$y_k^* = ak^2 + bk$$

$$y_{k+1}^* = a(k+1)^2 + b(k+1)$$

Sustituyendo:

$$ak^2 + 2ak + a + bk + b - ak^2 - bk = 12k + 16$$

2ak + a + b = 12k +16

I) 2a = 12

II) a + b = 16

Resolviendo el sistema se obtiene: a = 6 , b = 10

$$y_k^* = 6k^2 + 10k$$

$$y_k = Y_k + y_k^*$$

$$y_k = 6k^2 + 10k + C$$

Como $y_1 = 16 \Rightarrow 16 = 6 + 10 + C \Rightarrow C = 0$

Entonces: $y_k = 6k^2 + 10k$

Evaluando en k = 20

$$y_{20} = 6(20)^2 + 10(20) = 2400 + 200 = 2600$$

La distancia total que debe recorrer el obrero es de 2600 metros.

e) Un hombre tomó cierta cantidad de naranjas de un naranjal; pero para salir del campo tuvo que pasar por 7 puntos de control. Cada vez que pasaba por uno de los puntos de control, tenía que dejar la mitad de las naranjas que tuviera en ese momento más media naranja. Al realizar esta operación en los 7 puntos de control, salió con una sola naranja. ¿Cuál fue el número de naranjas que tomó, inicialmente, del naranjal?

Solución:

Sea y_k el número de naranjas con que quedó el hombre después de pasar por el punto de control número k.

$$y_{k+1} = \frac{1}{2} y_k - \frac{1}{2}, \quad y_7 = 1$$

$$y_{k+1} - \frac{1}{2} y_k = -\frac{1}{2}$$

$$m - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$Y_k = C\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$y_k^* = a$$

$$y_{k+1}^* = a$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$a - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -1$$

$$y_k^* = -1$$

$$y_k = Y_k + y_k^* \Rightarrow y_k = C\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1$$

Aplicando la condición $y_7 = 1$

$$1 = C\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1 \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 2 \Rightarrow C = 2.\ 2^7 \Rightarrow C = 256$$

$$y_k = 256\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1$$

El número que se pretende determinar es y_0. Entonces:

$$y_0 = 256\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1 = 256 - 1 = 255$$

El hombre cogió, inicialmente, 255 naranjas.

Conclusiones:

Las Integrales Finitas y las Ecuaciones en Diferencias Finitas tienen una gran aplicación práctica en la solución de problemas que están asociados con funciones de variables discretas.

Lamentablemente las Diferencias Finitas, como rama de la Matemática, que contiene a las Diferencias Finitas propiamente dichas, así como a las integrales finitas y a las ecuaciones en Diferencias Finitas, no suelen formar parte de los programas de estudio de las Carreras de Ingenierías y sólo se estudian en la Licenciatura en Economía. Más

Inconcebible aún es que no se estudie siquiera en la carrera de Licenciatura en Matemática.

Tal vez algún día se le otorgue a las Diferencias Finitas el lugar y la importancia que merece dentro de la Matemática.

Nuestra opinión es que no tiene aún el lugar que le corresponde, precisamente, por el desconocimiento que una gran parte de los matemáticos tienen con relación a esta rama de nuestra ciencia.

Bibliografía.

Hernández, R., 2006, “Técnicas para la resolución de problemas”. Evento: MATECOMPU 2006. Matanzas. Cuba.

Hernández, R., 2007, “Propuesta didáctica para identificar cuándo la Integral Definida es aplicable para resolver un problema”. Revista INIE. Actualidades Investigativas en Educación. Costa Rica.

Hernández, R. 2008 “Cómo identificar los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida”. Revista Aula Universitaria N 9. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina.

Hernández, R. 2009 “¿Cuándo se puede aplicar la integral definida para resolver un problema? Evento ALAMMI Colombia. 2009.

Hernández, R. y Delgado A. 2009 “Las Diferencias Finitas y sus Aplicaciones”. Libro de texto. Matanzas. Cuba.