BASES Y FUNDAMENTOS GENERALES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lic. Lisset Fonseca Miranda 1, Lic. Agnie de Armas Guitart[2] Lic. Yanisleydis Torres Leyva [3] Ing. Helwys González Lorenzo [4]

1. Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos, Carretera Varadero Km. 3 ½, CP 10400, Matanzas, Cuba.

2. Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos, Carretera Varadero Km. 3 ½, CP 10400, Matanzas, Cuba.

3. Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos, Carretera Varadero Km. 3 ½, CP 10400, Matanzas, Cuba.

4. Almacenes Centrales de TRD, Carretera a Cidra, Matanzas, Cuba.

CD de Monografías 2009

Resumen.

El siguiente trabajo ha sido desarrollado a partir de la colección de una serie de informaciones de estudios realizados sobre la educación de la enseñanza matemática, y en particular sobre la resolución de problemas, con el objetivo de exponer una serie de argumentos significativos para que el lector pueda descubrir no solo el papel intrínseco que juega las matemáticas en cada uno de nosotros y en cada una de las cuestiones de nuestra vida cotidiana, sino demostrar que desde hace muchísimos años el hombre usa las matemáticas para resolver problemas habituales. Se muestran además herramientas que facilitan la resolución de problemas.

***Palabras claves**: Resolución de Problemas.*

Introducción.

«La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces». (Puig Adam, 1958)

Las Matemáticas constituyen un lenguaje sin igual, ya que puede considerase como exacto, poderoso y eficaz. Esta es la causa del por que constituye la única asignatura que se estudia no solo en todas partes del mundo, sino en todos los niveles educativos, puesto que el estudiante se le enseña este idioma desde la enseñanza primaria hasta la universidad, en caso de que su carrera lo requiera. En cuestión, la vía de trasmitir este dialecto esta basada en ejercicios que reflejen situaciones de la vida cotidiana, desde la más sencilla hasta aquellas que exijan al estudiante mayor esfuerzo para llegar a la solución final, siendo precisamente el lenguaje matemático, una de las habilidades principales de comunicación a través de los métodos de Resolución de Problemas.

Desde hace algunos años en la Educación en Cuba, incluyendo la Enseñanza Superior se han venido desarrollando experiencias basadas en la estructuración de contenidos que se imparten en las distintas asignaturas, entre las cuales ocupan un lugar muy importante, las prácticas realizadas en Matemática; debido a las problemática que presenta actualmente la enseñanza de la misma.

Cuando se habla de las Matemáticas se hace referencia sin lugar a dudas, a la resolución de problemas, lo que a su vez constituye una problemática para los estudiantes. Ninguna teoría ha resuelto aún la cuestión de cómo enfrentar de manera efectiva la enseñanza en la resolución de problemas matemáticos.

Teniendo en cuenta estas consideraciones y la necesidad de desarrollo de la economía cubana, la cual esta inmersa en un proceso de subsistencia dentro de un mundo globalizado lleno de grandes problemas a resolver de la forma mas creadora y eficiente, se hace necesario atender de cerca la labor que realizan nuestros pedagogos, dado por el insuficiente desarrollo que, tanto desde el punto de vista teórico como didáctico, tiene la enseñanza de la resolución de problemas, y en particular en la educación superior.

Desarrollo.

Aspectos generales de la enseñanza de la resolución de problemas.

La resolución de problemas es inherente a la propia existencia del hombre como ser racional. Una vez que el homo sapiens se forma sobre el resto del reino animal, la propia vida le impone encontrar soluciones a los disímiles problemas que le planteaba la supervivencia misma.

A pesar de la característica pensadora del hombre, no fue hasta bastante tiempo después, que él se plantea la resolución de problemas como objeto de estudio en sí mismo, tanto en los planos epistemológico, como psicológico y pedagógico.

La historia de la enseñanza de la resolución de problemas en Matemática podría dividirse en varios momentos importantes fragmentados por dos años que han marcado hitos: En 1945 con la salida del conocido libro How to solve it (1945) de profesor y matemático húngaro George Polya y 1980 al dejar de ser la resolución de problemas un asunto de psicólogos y educadores individuales y declararse como objetivo de enseñanza.

Debe destacarse que la Educación Matemática en el mundo, al menos hasta mediados de los 80's, carecía de líneas de investigación y soporte teórico en torno a la enseñanza de la resolución de problemas.

Durante muchos años las metodologías y los diseños han estado inspirados por la experiencia y por las concepciones que, sobre las matemáticas, poseían los educadores. Han existido intentos de implementar en el aula la enseñanza de la resolución de problemas. Santos Trigo, (1994) describe que en muchos países "En la enseñanza de la Matemática, las ideas de Polya empezaron a implantarse significativamente alrededor de los ochentas. Las estrategias heurísticas como dibujar diagramas, buscar submetas, considerar casos particulares, y resolver problemas más simples, se consideraban como parte esencial en la instrucción matemática"

En la Educación Superior, tanto en Cuba como en otros países, no se produjo ningún movimiento en esta dirección, salvo experiencias aisladas.

Aporte de la tecnología a la resolución de problemas.

Son muchos los aportes tecnológicos que hoy colaboran con la resolución de problemas, para ello basta con citar la presencia cada vez mayor de calculadoras y computadoras personales (PC) en toda la vida moderna, lo cual motiva que el quehacer pedagógico no pueda sustraerse de ellas y que se hagan obsoletos determinados conocimientos y habilidades a los que hoy se les dedican considerables esfuerzos para la formación de los estudiantes.

El surgimiento de estas nuevas tecnologías no podemos verlo como una herramienta que entorpece el aprendizaje sino como una posibilidad de disminuir el tiempo que se dedica a la enseñanza de algunos contenidos. La cuestión no es prescindir de estos contenidos, lo importante es no hacerlos objeto de largas horas de práctica.

Reducir la enseñanza de las Matemáticas a la comprensión de las ideas básicas y la realización de ejemplos simples se puede ver como una forma de liberar un tiempo considerable y destinarlo a la profundización de otros aspectos como la resolución de problemas. La aparición en el mercado de productos con cada vez mayores posibilidades (DERIVE, MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, etc.) y la "posibilidad real" de adquirirlos, obliga ya al cambio, a pesar de que estos no respondan plenamente a las necesidades de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Es todo un hecho que la introducción del recurso informático en la enseñanza trae consigo múltiples ventajas, a saber: como medio de enseñanza, como medio de aprendizaje y como medio de investigación y resolución de problemas reales por el estudiante.

Debido a estas ventajas, habrá que resolver desde el punto de vista psicológico y didáctico cómo emplear el mismo en la enseñanza de la Matemática, teniendo en cuenta los métodos psicológicas del proceso de aprendizaje y el control por el profesor de la marcha de este proceso; se deberá determinar hasta qué punto su uso contribuye a un aprendizaje significativo, sin que en lugar de aportar mejorías implique grandes males dignos de arrepentimiento, habrá que analizar de igual forma en qué proporciones deberán combinarse el uso del lápiz y el papel y el trabajo con calculadoras y PC, qué contenidos habrá que renovar, entre otros problemas.

Esta problemática debe ser analizada por investigadores y especialistas cubanos de esta materia, aún cuando los recursos tecnológicos deseables para la clase de Matemática para asumir este reto no parezcan posibles en un momento dado, debido a la situación económica por la que atraviesa el país.

En resumen, el uso del recurso informático en la enseñanza de la Matemática es un hecho y consecuentemente hay que cambiar lo que se enseña y cómo se enseña, es el momento de ir desplazando el centro de atención del cálculo y la graficación a mano al razonamiento matemático (lógico, heurístico, metacognitivo); del alumno como eficiente calculador al estudiante inteligente y hábil en la solución de problemas.

Características que figuran en los algunos problemas.

Una vez que tenemos un problema, los hay más complejos y menos complicados, pero solo se hará referencia los rasgos que caracterizan a los problemas mas complejos, aquellos que consideramos como buenos problemas. A continuación se muestran algunas de estas características:

1. No son cuestiones con trampas ni acertijos. Es importante hacer esta distinción en la enseñanza porque los alumnos, cuando se les plantean problemas, tienden a pensar que si no hay (o al menos ellos no lo recuerdan directamente) un algoritmo para abordarlos ni se les ocurre ningún procedimiento, seguro que lo que sucede es que tiene que haber algún tipo de truco o de "magia". La práctica sistemática resolviendo problemas hace que esa percepción habitual vaya cambiando.
2. Pueden o no tener aplicaciones, pero el interés es por ellos mismos. Así como hay otras cuestiones cuya importancia proviene de que tienen un campo de aplicaciones (y sin descartar que los problemas las tengan), el interés de los problemas es por el propio proceso. Pero a pesar de ello, los buenos problemas suelen llevar a desarrollar procesos que, más tarde, se pueden aplicar a muchos otros campos.
3. Representan un desafío a las cualidades deseables en un matemático. Parece obvio para todo el mundo que existen unas cualidades que distinguen a las personas que resuelven problemas con facilidad, aunque si se tienen que señalar cuáles son, es bien dificultoso hacerlo. Y se tiende a pensar que coinciden en líneas generales con las cualidades propias de los matemáticos.
4. Una vez resueltos apetece proponerlos a otras personas para que a su vez intenten resolverlos. Pasa como con los chistes que nos gustan, que los contamos enseguida a otros, y así se van formando cadenas que explican su rápida difusión. Lo mismo sucede con los problemas complejos.
5. Parecen a primera vista algo abordable, no dejan bloqueado, sin capacidad de reacción. Y puede pasar que alguna solución parcial sea sencilla o incluso inmediata. Desde un punto de vista psicológico, sólo nos planteamos aquello que somos capaces (o al menos eso creemos) de resolver. Por eso, si un problema sólo lo es para nosotros cuando lo aceptamos como tal, difícil es que nos "embarquemos" en una aventura que nos parezca superior a nuestras fuerzas.
6. Proporcionan al resolverlos un tipo de placer difícil de explicar pero agradable de experimentar. La componente de placer es fundamental en todo desafío intelectual, si se quiere que sea asumido con gusto y de manera duradera. Incluso, en la enseñanza, la incorporación de esos factores a la práctica diaria pueden prefigurar la inclinación de los estudios futuros. Y no hay que olvidar que las matemáticas son de las materias que no dejan indiferente, se las quiere o se las odia (como aparece en múltiples estudios). Por ello más vale que introduzcamos refuerzos positivos para hacer que aumenten los que las aprecian.

Pasos a seguir en la resolución de problemas.

Habitualmente vemos al profesor universitario y algunos a nivel de secundaria afrontando preguntas tanto de los estudiantes como de sus propios colegas. Para muchas de esas interrogaciones siempre se tiene una objeción, aunque no siempre sea la mejor. Frecuentemente, escuchamos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se resuelve este problema?
- ¿Cómo asimilar este teorema?
- ¿Cómo se demuestra este teorema?

Realmente una vez señaladas las características de los buenos problemas, hay que referirse sin dudas a la importancia que tiene resolver problemas en clase. Recapacitemos, que, como dice Polya (1945) «sólo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas, hay, en la solución de todo problema, un poco de descubrimiento»; pero que, si se resuelve un problema y llega a excitar nuestra curiosidad, «este género de experiencia, a una determinada edad, puede determinar el gusto del trabajo intelectual y dejar, tanto en el espíritu como en el carácter, una huella que durará toda una vida».

Ciertamente para resolver problemas no existen recetas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos conlleven con éxito indudable a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución). Hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y aun en una formación parecida. Que suelen ser las que aplican (habitualmente de modo subconsciente) toda una cadena de mecanismos y técnicas que generalmente resultan adecuados para afrontar los problemas. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada, con método.

Algunos eminentes matemáticos tales como G. Polya y J. Dixmier, entre otros, han sugerido algunos lineamientos para ayudar a responder las preguntas anteriores que con frecuencia escuchamos.

Los consejos de G. Polya para responder a la interrogante de ¿cómo plantear y resolver problemas? son ya clásicos y bien conocido. La formulación que hizo en 1945 de las cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema se muestra a continuación:

1. Comprender el problema. Parece, a veces, innecesaria, sobre todo en contextos escolares; pero es de una importancia capital, sobre todo cuando los problemas a resolver no son de formulación estrictamente matemática. Es más, es la tarea más difícil, por ejemplo, cuando se ha de hacer un tratamiento informático: entender cuál es el problema que tenemos que abordar, dados los diferentes lenguajes que hablan el demandante y el informático.

    1 Se debe leer el enunciado despacio.
    2 ¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos)
    3 ¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos)
    4 Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas
    5 Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.

2. Trazar un plan para resolverlo. Hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo.

1 ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?

2 ¿Se puede plantear el problema de otra forma?

3 Imaginar un problema parecido pero más sencillo.

4 Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?

5 ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?

3. Poner en práctica el plan. También hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo. Y tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica.

1 Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.

2 ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?

3 Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto?

4 Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.

5 Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

4. Comprobar los resultados. Es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con el contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

1 Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.

2 ¿Se puede comprobar la solución?

3 ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?

4 ¿Se puede hallar alguna otra solución?

5 Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.

6 Se debe utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas.

A pesar de la propuesta de Polya hay que pensar que no basta con conocer técnicas de resolución de problemas, realmente se pueden conocer muchos métodos pero no cuál aplicar en un caso concreto. Por lo tanto se debe enseñar también a los alumnos a utilizar herramientas conocidas. Para ello se muestra a continuación una lista de técnicas heurísticas de uso frecuente, que se agrupa en tres fases, la misma se encuentran extractadas dentro de las líneas de desarrollo de las ideas de Polya,

Análisis.

1. Trazar un diagrama.
2. Examinar casos particulares.
3. Probar a simplificar el problema.

Exploración.

1. Examinar problemas esencialmente equivalentes.
2. Examinar problemas ligeramente modificados.
3. Examinar problemas ampliamente modificados.

Comprobación de la solución obtenida.

1. ¿Verifica la solución los criterios específicos siguientes?:
   a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
   b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
   c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
2. ¿Verifica la solución los criterios generales siguientes?:
   a) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
   b) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
   c) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
   d) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Son muchos los que han tratado este tema, también Jacques Dixmier comenta que una de las principales preguntas planteadas muchas veces (con toda razón) por los principiantes es la siguiente: ¿cómo asimilar un teorema? Al igual que Polya, Dixmier ofrece una respuesta a esta pregunta. El sugiere el siguiente método de trabajo:

- Se lee primero palabra por palabra el enunciado y la demostración, esforzándose por comprender las cadenas lógicas, sin buscar demasiado la idea general. Se puede uno ayudar con diagramas o figuras abstractas.
- Se rehace la demostración en una hoja aparte o en una pizarra, prescindiendo en lo posible del libro.
- Particularizando los datos del enunciado, se examinan casos concretos del teorema. Si es posible, inténtese considerar como casos particulares teoremas ya conocidos.
- El enunciado comprende varias hipótesis; se procura entender la necesidad de todas ellas, suprimiendo para ello alguna de las hipótesis e intentando hallar un ejemplo en el que la conclusión no sea exacta.
- Se buscan generalizaciones del teorema.

- En la demostración hay razonamientos rutinarios y una pequeña cantidad de ideas nuevas; se intentará descubrir estas últimas, de manera que lo esencial de la demostración se resuma en pocas palabras.
- Se vuelve sobre el teorema algún tiempo después, con preferencia la primera vez que se utilice aquel a lo largo del curso.

Este método de trabajo lleva mucho tiempo, y el estudiante no podrá habitualmente seguirlo hasta el final. Se le sugiere, sin embargo, que pruebe practicarlo de cuando en cuando. ¡Y además, que no se deje amedrentar!

Si nos detenemos por un instante a considerar las técnicas de trabajo propuestas por Polya y Dixmier podemos percibir que uno y otro son amplios y extenuantes. No obstante, la práctica demuestra que realmente si son muy efectivos.

Conclusiones.

Se puede concluir que el hombre desde tiempos remotos responde a su supervivencia a través de la resolución de problemas como característica inherente, lo cual a lo largo de la historia desarrolló su característica pensadora tanto en los planos epistemológico, como psicológico y pedagógico, marcando pautas importantes y dando lugar a respuestas viables en este campo. Esto permite afirmar que indiscutiblemente las ideas de Polya fueron significativas en la enseñanza de la resolución de problemas y que a su vez los aportes tecnológicos actuales constituyen un reto significativo que deben ser aprovechados como una oportunidad para la resolución de problemas, donde el uso de los Soft wears matemáticos existentes permite la reducción de la enseñanza matemática dando paso a la profundización de las ideas básicas y elementales que debe conocer el estudiante de hoy.

Bibliografía.

Delgado JR. 1999. La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas". Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana, Cuba.

Polya, G. 1965. Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México.

Polya, G. 1966. Matemática y razonamiento plausible. Editorial Estructura y Función. Madrid, España.

Santos, L. M. 1994."La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas". Cuadernos de Investigación Nº28. CINVESTAV-IPN. México.

Schoenfeld, A. 1985c. "Ideas y tendencias en la resolución de problemas" en La enseñanza de la Matemática a debate. M.E.C. Madrid, España.

Schoenfeld, A. 1985d."Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos" en la antología La enseñanza de la Matemática a debate. M.E.C. Madrid, España.

Talízina, N.F. 1984. Conferencias sobre "Los Fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior".MES. Ciudad de la Habana, Cuba.

Talízina, N.F. 1994. "La teoría de la actividad de estudio, como base de la didáctica de la Educación Superior". UNAM. México.