TRATAMIENTO DE LOS ERRORES EN LAS MEDICIONES MECÁNICAS

Ing. Laureano Suárez Martínez[1], Lic. Bárbaro Peña Rodriguez[1]

1. Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos, Carretera a Varadero, km 1 ½, Matanzas CP 67090, Cuba.

CD de Monografías 2008

Resumen.

Todo proceso de medición está asociado a la incertidumbre en la determinación del valor correcto, el investigador o el ingeniero deberá conocer su magnitud y ocurrencia para poder validar el alcance y la confianza de sus resultados, en este acercamiento al tema se describe la influencia de estos en el resultado final, el tratamiento estadístico o descriptivo a que deben someterse y la posibilidad de encontrar divergencias con otros resultados experimentales.

Palabras claves*: errores en las mediciones; estadística; pruebas no paramétricas; propagación del error*

Introducción.

El proceso de medición se define como un procedimiento de comparación contra un patrón establecido por un sistema de unidades consistente para obtener un valor numérico de la cantidad que nos interesa, y puede implicar desde una simple relación lineal para determinar la longitud de una pieza hasta la obtención de forma compleja, (a partir de relaciones fenomenológicas) de una magnitud. [Groover, 1996].
La medición mediante escalas y la verificación con calibres y patrones son varios de los métodos más comunes para determinar las dimensiones de las piezas. Todo proceso de este tipo tiene limitaciones asociadas a los medios empleados, los instrumentos, por ejemplo, tienen una apreciación finita, por lo que siempre existirá una magnitud mínima que se puede detectar, pero además si vamos mas allá, empezarán a revelarse las irregularidades de forma, típicas de toda superficie o al aumentar aún más finalmente detectaremos la naturaleza atómica o molecular del material con lo que la magnitud que se mide, dejará de estar definida.
Estas y otras razones son la que denominan el concepto de error en la medición, que en algunos casos se genera por procesos aleatorios, y en otros, influenciado por el sistema de medición, desviarán el valor obtenido del correcto y existirán hasta crasos desaciertos del investigador, que afectarán de conjunto el resultado final. Si se realiza una serie de mediciones en una misma superficie, se obtendrán diferentes valores, de las que es común tomar como mas representativa el valor promedio. Este valor obtenido se le llama medida nominal, el cual en la mayoría de los casos es un número que expresa una magnitud aproximada a la medida real, la diferencia que aparece entre estas medidas es lo que se denomina error absoluto:

$$E_{absol} = \left| Valor_{real} - Valor_{nominal} \right| \tag{1.1}$$

Esta cuantía del error, no representa un elemento de mucho uso práctico pues en la mayoría de los casos, por las razones que ya se expusieron, no se conoce el valor real de la magnitud medida, y no puede obtenerse entonces esta desviación absoluta, adicionalmente esta clasificación no revela el cuidado tenido durante la medición, note que no significa lo mismo un error absoluto de 1 mm en la medición de un dimensión de valor real 1 metro, que el mismo error en una distancia de 1 cm. Es en estos casos que aparece como definición más importante la de error relativo (Ecuación 1.2.1), o error relativo porcentual (Ecuación 1.2.2):

$$E_{rel} = \frac{\left| Valor_{real} - Valor_{no\min al} \right|}{Valor_{real}} \tag{1.2.1}$$

$$E_{rel} = \frac{\left| Valor_{real} - Valor_{no\min al} \right|}{Valor_{real}} x100\% \quad . \tag{1.2.2}$$

1.1. Precisión y Exactitud

En los instrumentos de medición se origina otro tipo de error además del que genera la *precisión*, el cual se asocia a la *exactitud* de los mismos, esto exige la definición correcta de estos términos cuyo significado con frecuencia se confunde. La precisión de un instrumento o un método de medición esta relacionada a la sensibilidad o menor variación de la magnitud que pueda detectar. Por ejemplo, decimos que un micrométrico de exteriores, es más preciso que una regla graduada en milímetros (la apreciación en el primero es del orden de los micrómetros); o que un cronómetro es más preciso que un reloj de bolsillo, sobre la misma base

Por otra parte, la exactitud de un instrumento o método de medición se relaciona a la concordancia contra la referencia patrón del mismo. Cuando un instrumento es fabricado se calibra a una medida de referencia, que varia con el funcionamiento del mismo, por lo que periódicamente debe ser restablecida su exactitud Supongamos que un termopar es capaz de determinar la centésima de grado de temperatura pero se desvía dos segundos por cada grado de la escala, mientras que un termómetro de mercurio común no lo hace. En este caso decimos que el termopar es todavía más preciso que el termómetro de mercurio, pero menos exacto. La exactitud es una medida de la calidad de la calibración de nuestro instrumento respecto a patrones de medida aceptados internacionalmente. En la Figura 1.1 se muestra esquemáticamente estos conceptos, en ella los círculos concéntricos dan una idea del valor correcto central, y los puntos los diferentes intentos en la determinación de este valor. En la figura *a*, los puntos se encuentran agrupados (precisos), pero son poco exactos (lejos del centro), en *b*, se nota precisión y exactitud, en *c* estos indicadores son peores, mientras que en *d* aunque hay exactitud se nota una baja precisión.

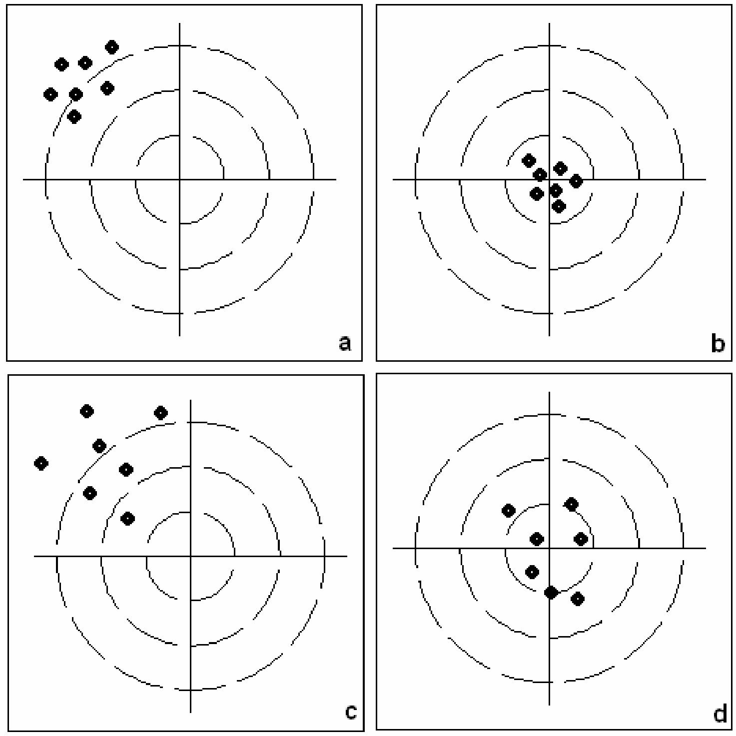


Figura 1.1. Representación en la que pueden observarse la diferencia entre los conceptos precisión y exactitud

1.2. Cifras significativas.

Al medir una magnitud cualquiera sobre la escala del instrumento de medición solo se pueden leer o apreciar divisiones, medias divisiones, décimas de divisiones u otras fracciones de esta, esto conduce a que las observaciones son necesariamente múltiplos de la apreciación (Ap) del instrumento, porque en cada lectura el observador redondea el valor real.
Por ejemplo al medir una longitud, es probable que el extremo del elemento medido no coincida con ninguna división de la escala del instrumento como en la *Figura 1.2*, en el primer caso, se observa que la longitud no es 9 ni 10 divisiones (aceptaremos que estas pueden ser milímetros). Por lo cual el observador trata de expresar esta situación escribiendo una cifra más, que no es leída, sino estimada por él "a ojo", escribiendo 9.3 [mm], El observador reconoce que es capaz de distinguir entre 9.2 [mm], 9.3[mm] y 9.4 [mm]; y elige como la mejor lectura 9.3 [mm]. Entonces la estimación de su lectura, en esas condiciones, es de 0.1 [mm].
En la figura (1.2 b), se tiene una situación en que el mismo observador mide con una regla de la misma apreciación Ahora lee 9 [mm] (ni 8 [mm] ni 10 [mm]); pero además "ve" (esto es una decisión personal del que está midiendo) que la lectura no es ni 8.9 [mm] ni 9.1 [mm]. Entonces escribe 9.0 [mm].En la figura (1.2 c), se presenta otra

situación (que puede corresponder a una regla de trazos más gruesos, o a mala iluminación), en la cual sólo se puede decir si el extremo de la varilla que se quiere medir coincide o no coincide con una división de la regla. En casos como éste, la estimación de las lecturas puede ser 9,0 mm, aunque puede perfectamente aceptar que esta mide 8.9 o 9.1. De este ejemplo se desprende que al realizar una medición siempre se acepta como dudosa la última cifra, pues corresponde al menor intervalo que se puede estimar con ayuda de la escala del instrumento.

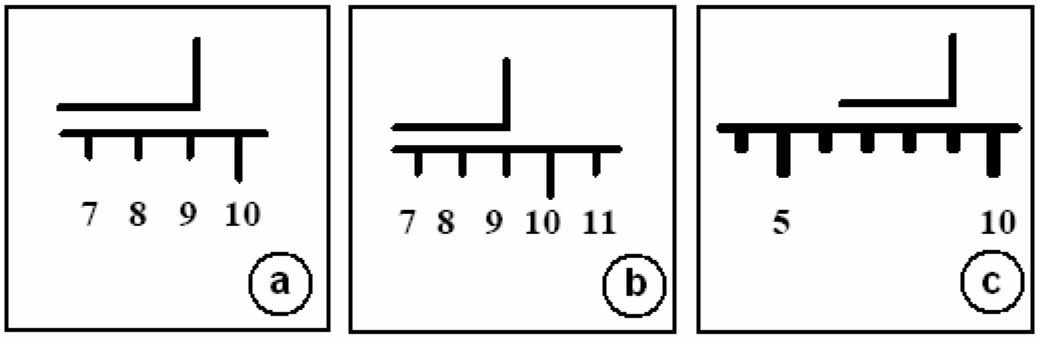


Figura 1.2. Estimación de una lectura, provocada por la precisión del instrumento.

Resumiendo, nuestro resultado de la *Figura 1.2*, este puede expresarse como 9 ±0.1mm, aquí se dice que tiene solo una cifra significativa; la cantidad de cifras significativas es pues igual al número de dígitos que caen a la izquierda de la primera cifra afectada por el error, es decir la cantidad de dígitos sin contar el (o los) cero (s) en el extremo izquierdo, si es que hay. Por ejemplo los números 8,4; 75,0 y 0,0019 tienen todos dos cifras significativas
No es correcto tampoco expresar un resultado como 95,456 ±1 mm, ya que si tenemos incertidumbre del orden de 1 mm, mal podemos asegurar el valor de las décimas, centésimas y milésimas del milímetro. Si el valor de *L* proviene de un promedio y el error es del orden del milímetro, se debe redondear el dígito donde primero cae el error.
De acuerdo con lo anterior se pueden deducir tres reglas:

1. Cuando se estima la incertidumbre de una magnitud y se expresa como más o menos, la incertidumbre es una estimación del error.
2. El error se expresa con una sola cifra significativa.
3. La cifra que expresa el error, debe coincidir, en cuanto a posición con la última cifra significativa de la cantidad en cuestión.

Por ejemplo, los valores:
(8,286 ± 0,02) [mm]
(3,896 ± 0,0002) [mm]
(5,876 ± 0,2) [mm]
están todos mal escritos porque en todos ellos la posición de la última cifra significativa no coincide con la posición de la cifra en el error.

1.3. Definición de los tipos de errores

Como se explicó anteriormente los errores pueden ser de naturaleza aleatoria, sistemática o desaciertos de la medición [Urquiaga, 2006]. Este último caso puede ser fácilmente identificado y eliminarse su influencia, cuando no corresponde con seguridad al principio físico en que se basa el método de medición, por ejemplo si se esta registrando la variación de temperatura de un liquido al que se le agrega calor, es improbable que entre dos mediciones espaciadas en el tiempo la temperatura disminuya, en tales casos un valor de ese tipo puede considerarse anormal y se puede sin reparos apartarlo del conjunto.

- *Errores sistemáticos:* Como su nombre lo indica, son aquellos cuyo valor se repite por lo que puede ser identificado ser evitado. Son generalmente debidos a errores del instrumento, su construcción o manipulación y en algunos casos a causa del operario. También pueden deberse a la presión que ejercen la superficie de medición sobre la pieza al medir o a la temperatura a la cual se mide entre otras. Son constantes en sentido y valor absoluto.

Ejemplo 1. En la determinación del tiempo que tarda un corredor en desplazarse 100 m planos, uno de los jueces de pista registra valores que arrojan un promedio de 9,92 seg., mientras que otros dos encuentran promedios de 9,87 seg. Al realizar un examen médico se detecto que el primer juez presentaba una enfermedad auditiva que retardaba la audición del disparo de arrancada y este tiempo de demora aparecía *sistemáticamente* en cada una de sus lecturas; se pudo medir la magnitud de este retardo auditivo el cual arrojo un valor de 0,05 seg., el cual al ser restado a sus registros evidenció la concordancia en un tiempo de la carrera de 9,87 seg.
Debe señalarse que aunque los errores sistemáticos son de valor constante no siempre pueden ser determinados y en tales casos su efecto pasa a formar parte del error residual presente en la medición, note que en el ejemplo anterior si no se detecta la enfermedad del juez, el valor del tiempo promedio seria mayor y con ello el resultado de la carrera podría verse afectado.

- *Errores casuales o aleatorios:* son las que aparecen como diferencia cuando la medición la realiza la misma persona con gran cuidado y en condiciones tan aproximadamente iguales como sea posible. Comúnmente se deben a variaciones del rozamiento entre los elementos móviles del instrumento, a diferencias microscópicas entre las posiciones de la pieza a examinar, o a variaciones puntuales de la temperatura ambiente, etc. No siguen una ley determinada por lo que no pueden corregirse como los errores sistemáticos, pero si pueden ser acotados en un intervalo, tanto menor como mayor sea la precaución que se tome en la medición [Cartilla, 1986].

Ejemplo 2. Al medir una magnitud cualquiera sobre la escala del instrumento de medición solo se pueden leer o aprecian divisiones, medias divisiones, décimas de divisiones u otras fracciones de esta, esto conduce a que las observaciones son necesariamente múltiplos de la apreciación (Ap) del instrumento, porque en cada lectura el observador redondea el valor real y con ello provoca que exista una diferencia detectable entre el valor real y el valor determinado, tanto mas significativa como mayor sea la apreciación del instrumento empleado. En aquellos sistemas de medición donde se repite el mismo valor en todas las observaciones, ocurre que la desviación existente entre estas es mucho menor que la apreciación del instrumento y estas no se manifiestan, siendo el resultado final inexacto.

1.4. Tratamiento estadístico de los errores aleatorios

Al investigador le interesa conocer la valides de la información que procesa, el ingeniero necesita determinar la precisión y exactitud de la magnitudes que proyecta y diseña, para expresar con confianza los resultados planificados, un electricista necesita determinar con exactitud las mediciones de voltaje, corriente, resistencia, etc., pues ello determina la seguridad de los equipos [Bidegain, 2008]. Estos ejemplos muestran porque la precisión en la medición constituye tema de investigación constante, como consecuencia se ha demostrado que en muchos casos los resultados de medición siguen un comportamiento según una función o densidad de distribución definida, conocida como ley de distribución normal o gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}} \qquad (1.3)$$

donde:
e =2,718 base de los logaritmos naturales
π =3,146
μ =valor esperado del conjunto de medidas de la población
σ =desviación típica de la población
Esta función constituye el comportamiento teórico hacia el cual tienden los valores de observaciones en la medida que aumenta el tamaño de la muestra tomada, y de su uso práctico se valen los especialistas para expresar el resultado de una magnitud a partir de varias observaciones de ella.
Cuando se toma un conjunto *n* de lecturas, realizadas sobre una misma superficie y se denota cada lectura por x_i el valor esperado de estas se define como promedio o media aritmética y se calcula como:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad (1.4)$$

que es un estimador sin sesgo de la media de la población μ este valor particular se encontrará como mejor estimador de la tendencia central de la distribución de los valores medidos, y la desviación o distancia de cada lectura a la media se determina según:

$$d_i = x_i - \bar{x} \tag{1.5}$$

Como es de esperar de distribuciones aleatorias, la distancia entre cada valor y la media será diferente, pero al describir diferentes distribuciones, puede suceder que estas tengan un mismo o cercano valor promedio, mientras que pueden estar mas alejadas o dispersas alrededor de la media, en estos casos es de utilidad indicar con algún estadígrafo la magnitud de la dispersión de los valores obtenidos

El estimador de la dispersión que se emplea en estos casos consiste en sumar todas las desviaciones (ecuación 1,5) y dividir entre el numero de ellas, pero para evitar que se anulen aquellas de signo diferente, aparecen elevadas al cuadrado en ambos términos, este estimador se conoce como varianza (ecuación 1.6) de la que se obtiene la desviación típica aplicando raíces (ecuación 1.7):

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} \tag{1.6}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}} \tag{1.7}$$

La desviación promedio (estándar o típica como también se le conoce) de una población puede ser estimada a partir de una muestra de esta y entonces se representa por:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{1.8}$$

obsérvese aquí el cambio entre μ por $\bar{x}$ y la adición de un grado de libertad en el denominador, de particular importancia para muestras pequeñas.

Este estadígrafo tiene varias propiedades interesantes para la determinación del valor promedio.

1. Para las distribuciones normales (n≥30), en el intervalo $[\bar{x} - s \ ; \ \bar{x} + s]$ aparecerán aproximadamente el 68,27% (0,6827) de los valores medidos, es decir una desviación estándar a cada lado de la media..
2. El 95,45 % (0,9545) de los datos probablemente estará incluido en el intervalo $[\bar{x} - 2s \ ; \ \bar{x} + 2s]$ (dos desviaciones a cada lado).
3. Alrededor del 99.95 % (0.9995) de las observaciones se encuentran en el intervalo $[\bar{x} - 3s \ ; \ \bar{x} + 3s]$

Esto permite construir las tablas que relaciona a la desviación típica con la amplitud del intervalo de confianza que aparecen en los libros de estadística y de la que se muestran algunos valores en la *Tabla 1,1*, en la que z significa el factor que afecta a la desviación típica

Tabla 1.1. Algunos valores representativos del área bajo la curva [P(z)], para la distribución normal estándar.

z	P(z)
1,282	0,80
1,645	0,90
1,960	0,95
2,576	0,99
3,291	0,999

Si se forman grupos de observaciones de una medida y se determina el promedio de cada una de ellas, con estos promedios se puede formar un conjunto que se distribuirá como una función gaussiana, con desviación típica, $\frac{S_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$., que se conoce con el nombre de error estándar del promedio

Aprovechando este resultado y las relaciones de desviación típica para la determinación del valor promedio, pueden construirse intervalos en los que se conoce aproximadamente con un nivel de confianza prefijado que contiene el valor promedio o mejor estimador del valor correcto de la medición. Usualmente el nivel de confianza aceptado es de 95% (0.95) y entonces el intervalo que contiene el valor de la medición será:

$$\bar{x} \pm z\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1.9)$$

donde la cantidad $z\frac{s}{\sqrt{n}}$ se denomina incertidumbre de la medición.

Cuando n es pequeña (n<30), también es posible formar un intervalo de confianza para estimar a μ sustituyendo la z de la distribución normal por la *t* de distribución de Student, que aparece en la *Tabla 1,2.,* en la que los valores de *t* dependen ahora del nivel de confianza *Pt* y del número de mediciones empleadas en los cálculos (*n*).

Tabla 1.2. Valores de t para muestras pequeñas (distribución de Student)

n	***Pt* = 0.997**	***Pt* = 0.95**	***Pt* = 0.90**	***Pt* = 0.80**
1	63.66	12.71	6.31	3.08
2	9.92	4.3	2.92	1.89
3	5.84	3.18	2.35	1.64
4	4.6	2.78	2.13	1.53
5	4.03	2.57	2.02	1.48

6	3.71	2.45	1.94	1.44
7	3.5	2.36	1.9	1.42
8	3.36	2.31	1.86	1.40
9	3.25	2.26	1.83	1.38
10	3.17	2.23	1.81	1.37
11	3.11	2.2	1.80	1.36
12	3.06	2.18	1.78	1.36
13	3.01	2.16	1.77	1.35
14	2.98	2.14	1.76	1.34
15	2.95	2.13	1.75	1.34
16	2.92	2.12	1.75	1.34
17	2.9	2.11	1.74	1.33
18	2.88	2.10	1.73	1.33
19	2.86	2.09	1.73	1.33
20	2.84	2.09	1.72	1.32

La cuantía de este intervalo para muestras pequeñas vendrá determinado por la ecuación 1.10, en la que cada variable tiene el mismo significado que se estableció anteriormente:

$$\bar{x} \pm t\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1.10)$$

1.5. Eliminación de valores extraños.

A diferencia de aquellas observaciones que resultan evidentemente anormales, y que se apartan con facilidad del grupo de mediciones, existen otras que no pueden despreciarse con tanta facilidad por el efecto que pueden provocar en la precisión del resultado final, y deben hacerse uso de razones consistentes para su análisis

Una manera de tratar el asunto es haciendo uso de las propiedades de la desviación típica, como se dijo anteriormente si podemos esperar que alrededor del 99.95 % (0.9995) de las observaciones se encuentran en el intervalo $[\bar{x} - 3s\ ;\ \bar{x} + 3s]$, entonces al construir este intervalo, los valores externos a el no pertenecen con seguridad a la distribución y pueden eliminarse.

Usualmente se aplica una prueba mas restrictiva conocida como criterio de *Chauvenet*, que indica que una observación puede eliminarse, si la probabilidad de obtener una desviación particular en valor promedio es menor de *1/2n*; los valores de esta razón de desviación aceptable se muestran en la Tabla 1.3.

Tabla 1.3. Criterio de *Chauvenet* para rechazar una lectura [Maya, 2004].

Número de lecturas n	Razón de desviación máxima aceptable
3	1.38
4	1.54
5	1.65
6	1.73
7	1.80
10	1.96
15	2.13
25	2.33
50	2.57
100	2.81
300	3.14
500	3.29
1000	3.48

.

Ejemplo 3: De la medición por un operario del diámetro de una pieza con un micrómetro de exteriores se obtuvieron los resultados que aparecen en la columna (Oper_1) de la tabla 1.4. Considerando que el proceso se aproxima a un comportamiento normal, determine con un 95% de fiabilidad el verdadero valor del diámetro.

Tabla 1.4. Resultados de la medición del diámetro

Lectura	Oper_1(mm)	di	di/σ
1	40.300	0,313	0,50
2	40.730	0,117	0,19
3	41.770	1,157	1,85
4	40.260	0,353	0,56
5	39.330	1,283	2,05
6	40.450	0,163	0,26
7	41.090	0,477	0,76
8	40.640	0,027	0,04
9	40.810	0,197	0,31
10	40.750	0,137	0,22

1. Cálculo de los estadígrafos necesarios.

a. *Media aritmética* (ecuación 1.4)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = 40.613 \ \ mm$$

b. *Desviación típica*, como se dispone de menos de 30 observaciones la clasificamos como una muestra pequeña, y empleamos la ecuación 1.8.

$$s=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{(40.300-40.613)^2+(40.730-40.613)^2+...+(40.750-40.613)^2}{10-1}}$$

$$s=0.627\ mm$$

c. Eliminación de valores extraños:

En la tabla 1.4 las dos últimas columnas indican la desviación de cada valor a la media (ecuación 1.5) y la razón obtenida al dividir con la desviación típica muestral (di/σ), estos valores se comparan con los de la tabla 1.3 que para 10 valores muestra una razón máxima aceptable de 1.96 notando que la quinta observación (39.330), tiene un cociente superior (di/σ=2.05), lo que justifica su eliminación.

Nuevamente, con los nueve valores restantes son recalculados los estadígrafos necesarios quedando:

$$\bar{x}=\ 40.756\ \ mm$$

$$s=0.462\ mm$$

d. Intervalo de confianza, tabla 1.2 (distribución de Student), *n*=9, *Pt*=0.95 de donde t=2.26, utilizando la ecuación 1.10.

$$\bar{x}\pm t\frac{s}{\sqrt{n}}=40.756\pm 2.26\frac{0.462}{\sqrt{9}}=40.756\pm 0.348$$

$$[40.408\ ;\ 41.104]$$

Respuesta: El verdadero valor del diámetro medido, es de 40,756±0,348 mm con un 95 % de confiabilidad.

2. Propagación del error

Hasta el momento hemos analizado como acotar los errores en la medición directa de una magnitud física, que se mide, pero en muchos de los casos en que el ingeniero realiza su actividad es necesario, medir indirectamente la cantidad en estudio, a partir de otros parámetros que se le relacionan físicamente y con estos determinar la medida deseada, por ejemplo al comprobar el volumen de líquido en un recipiente, en ocasiones por su tamaño es preferible (a veces la única variante) emplear la conocida relación $v=\pi d^2/4 * h$, que ponderar empleando una probeta graduada el volumen contenido, pero si se emplea esta ecuación se deberán medir el diámetro y el volumen, y durante el control de cada uno de ellos pueden ocurrir errores asociados al proceso de medición como se vio con anterioridad. Pero: ¿Cómo influye el error en la medición de cada variable, en el error total?

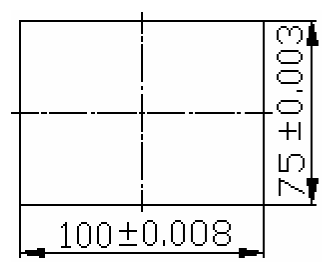
2.1. Cálculo del error en las mediciones indirectas.

Medición indirecta: Es la medición en que la cantidad de la magnitud a medir se determina mediante la dependencia conocida entre esta y los valores de otras cantidades de magnitud, halladas directamente unas o a su vez indirectamente otras con o sin la ayuda de tablas [Coello, 2006]. Ejemplo de ello es el cálculo de los valores angulares empleando relaciones trigonométricas, o la determinación de las tensiones residuales, al medir los desplazamientos y el modulo de elasticidad del material para luego emplear la *Ley de Hooke* ($\sigma = E.\varepsilon$), etc.

Si definimos e_T como el error total, y e_1, e_2,…, e_n , el error en cada una de las variables independientes, y si cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de ocurrencia, entonces según estas probabilidades, el error total estará dado por [Delfino, 1985]:

$$e_T = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x_1} e_1)^2 + (\frac{\partial F}{\partial x_2} e_2)^2 + ... + (\frac{\partial F}{\partial x_n} e_n)^2} \qquad (2.1)$$

Ejemplo 4:
Calcule el área de la sección transversal de un elemento rectangular, si se determina por medición directa que sus lados miden *a=100 ±0.008 mm* y *b=75 ±0.003 mm.*



Este ejemplo trata, de la determinación de forma indirecta del área del elemento empleando la relación $A = a.b$, las variables independientes que se miden directamente son los lados *a* y *b* del rectángulo y el error asociado a su medición directa son e_a=±0.008 y e_b=±0.003

1. $Area = a * b = 100 * 75 = 7500$ mm^2 .

2. $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial A}{\partial a} = b$, $\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial A}{\partial b} = a$, sustituyendo en la ecuación 2.1:

$$e_T = \sqrt{(b * e_a)^2 + (a * e_b)^2} = \sqrt{(75 * 0.008)^2 + (100 * 0.003)^2} = \pm 0.671$$

Respuesta: El área buscada tiene un valor de 7500±0.671 mm^2

Las soluciones de la ecuación 2.1 aparecen tabuladas en muchos casos, aportando la utilidad adicional de evitar tener que resolver las derivadas parciales, así si escribimos el error total con un subíndice denotando la operación matemática, para el caso de la suma resulta:

$$E_{suma} = \pm\sqrt{E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2}} \tag{2.2}$$

Si se trata de *n* sumandos

$$E_{suma} = \pm\sqrt{E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2} ... E_n^{\ 2}} \tag{2.3}$$

Para la resta:

$$E_{resta} = \pm\sqrt{E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2}} \tag{2.4}$$

Si la función resulta el producto entre variables, como el ejemplo 4:

$$E_{producto} = \pm\sqrt{(E_A.B)^2 + (E_B.A)^2} \tag{2.5}$$

Para encontrar una forma general de expresar la propagación del error del producto podemos emplear:

$$\begin{aligned} E_{producto} &= \pm A.B\frac{\sqrt{(E_A.B)^2 + (E_B.A)^2}}{A^2B^2} \\ &= \pm A.B\sqrt{(\frac{E_A}{A})^2 + (\frac{E_B}{B})^2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

De donde se deriva:

$$E_{producto} = \pm A.B.C...N\sqrt{(\frac{E_A}{A})^2 + (\frac{E_B}{B})^2 + ... + (\frac{E_N}{N})^2} \tag{2.7}$$

Igualmente, para el cociente:

$$E_{cociente} = \pm\frac{A}{B}\sqrt{(\frac{E_A}{A})^2 + (\frac{E_B}{B})^2} = \frac{1}{B^2}\sqrt{(E_AB)^2 + (E_BA)^2} \tag{2.8}$$

Si se trata del producto de una constante por una magnitud:

$$E_{prod\_Const} = \pm C.E_A \tag{2.9}$$

donde, *C* representa el valor de la constante.

Para la función en que se eleva a un exponente:

$$\begin{aligned} E_{\exp onente} &= A^n\sqrt{n(\frac{E_A}{A})^2} = \frac{E_A}{A}A^n\sqrt{n} \qquad \text{ó} \\ E_{\exp onente} &= E_AA^{n-1}\sqrt{n} \end{aligned} \tag{2.10}$$

De la misma forma, por representar un caso particular de la potenciación, en la función con radical de orden *n* el error se propaga según:

$$E_{radical} = \frac{1}{n}E_AA^{(\frac{1}{n-1})} = \frac{E_A\sqrt[n]{A}}{nA} \tag{2.11}$$

Todas estas formulas conocidas como de propagación del error en mediciones indirectas se obtienen por sustitución en la ecuación 2.1.

3. Comparación de resultados diferentes

La importancia de la repetición en las mediciones se revela de inmediato en la *ecuación 1.9*, en la que aparece $\sqrt{n}$ en el denominador, lo cual una expresión del teorema del límite central, que puede interpretarse en este caso particular como que al aumentar la cantidad de mediciones, más estrecho será el intervalo que contiene al valor verdadero, sin embargo no debe olvidarse que desde el punto de vista físico este solo puede disminuir hasta hacerse igual o del orden de la apreciación del instrumento utilizado.
Además de esto, por ser cada observación una variable aleatoria, raramente coincidirán los valores promedios obtenidos, siendo esto una dificultad si deseamos determinar la existencia de diferencias entre los resultados alcanzados en la medición de una dimensión si esta es realizada en diferentes laboratorios.

3.1. Pruebas paramétricas

Para muestras en las que la varianza es homogénea, puede emplearse el estadígrafo de decisión t, con una distribución t de *Student* con *n-1* grados de libertad, exigiéndose que la distribución sea normal o aproximadamente normal, las dócimas de hipótesis que se plantean son:

Ho: $\mu_1=\mu_2$

H1: $\mu_1\neq\mu_2$

y la región critica para el estadígrafo t dado el nivel de significación α:

$\left\{t \in ¡\ \mathrm{P}t\right\} > t_{1-\alpha/2}(n-1)$.

El estadígrafo t se calcula como:

$$t = \frac{\overline{x}-\mu_o}{s/\sqrt{n}} \qquad (2.12)$$

Ejemplo 5:

La longitud media de las piezas producidas por una máquina herramienta tiene un distribución normal y ha sido establecida como promedio 2.87 cm, una muestra simple aleatoria de 20 piezas, tomada durante una verificación arroja una longitud media de 2.82 cm con una varianza de 0.04. Serán representativos los valores medidos con un nivel de confianza del 95% o estarán afectados como resultado de los errores de medición.

Datos:

$\mu_o = 2.87$ $\qquad \overline{\mathrm{x}} = 2.82$

$n = 20$ $\qquad \mathrm{s}^2 = 0.04$

$\qquad \mathrm{s} = 0.20$

Hipótesis:

$Ho:\ \ \mu o = \overline{x}$

$H_1:\ \ \mu o \neq \overline{x}$

$$t = \frac{2.82 - 2.87}{0.2\sqrt{20}} = -1.12$$

Regla de decisión:

Rechazar Ho si $|t| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$

No rechazar si $|t| \leq t_{1-\alpha/2}(n-1)$

De la tabla 1.2 con 1-α=0.95 y *n-1*=19

$t_{0.95}(19) = 2.09$

Respuesta: Como $|-1.12| < 2.09$ no puede rechazarse la hipótesis nula, que establece la igualdad de los valores medidos.

3.2. Pruebas no paramétricas

Cuando las muestras son pequeñas (n<30) y no hay certeza de la normalidad de su comportamiento, se recomienda el empleo de pruebas no paramétricas como el test de suma de rangos también conocida como prueba *U* de *Wilcoxon* o *Man-Whitney* en honor a los científicos que la enunciaron [Spiegel ,1995].

El procedimiento se explica a continuación:

1. Primeramente se clasifican los datos de manera conjunta como si formaran parte de una sola muestra, en orden creciente de magnitud, en caso de valores iguales de diferentes muestras, se le asigna el rango que las contiene el valor de la media de los rangos en conjunto (por ejemplo si el quinto, sexto y séptimo valor fueran iguales y pertenecientes a muestras diferentes, cada un tendría el rango $\frac{5+6+7}{3} = 6$.
2. Se encuentra el valor de los rangos de cada muestra y se suman para obtener el valor de W1 y W2 correspondiente a las muestras 1 y 2.
3. Se calcula el estadígrafo de decisión *U*, calculando para cada muestra:
$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} \quad \text{y} \quad U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2} \qquad (2.13)$$
y definiendo a *U* como el menor de los dos.
4. Región crítica: Se plantea la prueba de hipótesis en la que si se requiere probar que la muestra 1 es estocásticamente mayor que 2, deberá $z_{calc} > z_{\alpha}$.
$$\text{Siendo } z_{calc} = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} \quad \text{y} \quad \mu_U = \frac{n_1 * n_2}{2} \quad , \quad \sigma_U = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} \qquad (2.14)$$
y z_{α} el valor tabulado de la distribución normal con 1-α, nivel de confianza (pueden emplearse los valores de la tabla 1.1)

Ejemplo 6:

La resistencia a la ruptura (en N) de cierto material, es controlada en dos laboratorios certificados empleando el mismo procedimiento y se necesita saber si ambos valores obtenidos son representativos de la cantidad promedio de resistencia para el material ensayado.

No.	Resistencia (N)	Laboratorio	Resistencia (N)	Laboratorio
1	144	I	175	II
2	181	I	164	II
3	200	I	172	II
4	187	I	194	II
5	169	I	176	II
6	171	I	198	II
7	186	I	154	II
8	194	I	134	II
9	176	I	169	II
10	182	I	164	II
11	133	I	185	II
12	183	I	159	II
13	197	I	161	II
14	165	I	189	II
15	180	I	170	II
16	199	I	164	II

Solución:

1. Clasificación conjunta, se agrupa los datos para encontrar el rango que ocupan. (Observe el cambio de rango en las celdas 11 y 12, 17 y 18, 27 y 28)

No.	Resistencia N	Laboratorio	Rango
1	133	I	1
2	134	II	2
3	144	I	3
4	154	II	4
5	159	II	5
6	161	II	6
7	164	II	7
8	164	II	8
9	164	II	9

10	165	I	10
11	169	I	11.5
12	169	II	11.5
13	170	II	12
14	171	I	13
15	172	II	14
16	175	II	15
17	176	I	16.5
18	176	II	16.5
19	180	I	17
20	181	I	18
21	182	I	19
22	183	I	20
23	185	II	21
24	186	I	22
25	187	I	23
26	189	II	24
27	194	I	25.5
28	194	II	25.5
29	197	I	26
30	198	II	27
31	199	I	28
32	200	I	29

1. El valor de los rangos de cada muestra aparece en la columna 3 de la tabla en la que se resalta en color diferente aquellas medidas correspondientes al laboratorio I, sumando estos valores se encuentran W_1=282.5 y W_2=207.5.
2. Se calculan según 2.13 U_1= 146.5 y U_2=71.5, y se selecciona este último como U por ser el menor de ambos. U=71.5
3. Se plantea la prueba de hipótesis en este caso:

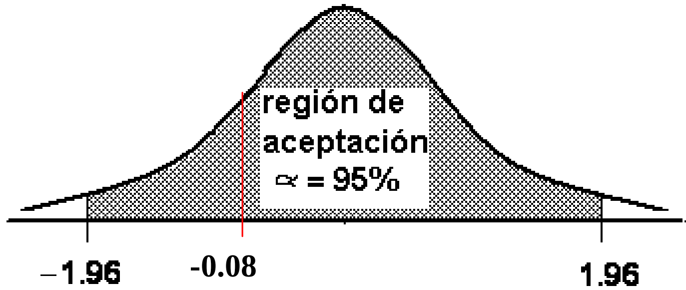
   $Ho: \mu_1 = \mu_2$

   $H1: \mu_1 \neq \mu_2$

   y de la ecuación 2.14, se determinan $\mu_U = 128$ y $\sigma_U = 704$ para encontrar

   $Z_{cal} = -0.08$

5. De la tabla 1.1, encontramos, con un 95% de certeza $z_{\alpha-}$<-1.96, y $z_{\alpha+}$>1.96 (se emplean los dos extremos de la curva de distribución normal pues la prueba es de dos colas).



Y como z_{calc} cae en la región de aceptación, no puede rechazarse la hipótesis nula y puede afirmarse con un 95% de confianza que los valores promedios obtenidos en ambos laboratorios, no difieren entre sí.

Conclusiones.

El conocimiento de los posibles errores que se pueden cometer en el proceso de medición permite controlar la magnitud e influencia de estos en el resultado final, en el caso de los errores aleatorios aún cuando no puedan ser eliminados del resultado final es posible acotar el intervalo de incertidumbre, y con ello lograr la certeza de su valor.

Adicionalmente esta incertidumbre puede ser analizada y conocer su propagación en el caso de mediciones indirectas, permitiendo el empleo de dócimas de hipótesis para validar y comparar muestras independientes en el caso que estas sigan una distribución normal o no, téngase en cuenta que una prueba paramétrica siempre será preferible de usar por su potencia, justificando el uso de las que no exigen el cumplimiento de requisitos paramétricos para los otros casos.

Los métodos aquí tratados pueden ser útiles para el estudiante o el profesional y adicionalmente son validos en investigaciones científicas en las que como es evidente el nivel de significación escogido deberá ser superior.

Bibliografía.

1 Groover, M. P., “Fundamentos de Manufactura Moderna, Materiales Procesos y Sistemas”,1era Ed. Prentice Hall, Hispanoamericana S.A., México, 1996. ISBN 968-880-846-6.
2 Coello, N. I. y otros, La incertidumbre de la medición y la problemática Seis Sigma. Una meta alcanzable o una solución del futuro, COMEC-2006, Universidad Central, Marta Abreu“ de Las Villas / Universität Otto-von-Guericke- Magdeburg. ISBN 959-250-147-5
3 Bidegain, M., Díaz A. Barreiro, M., “Análisis estadístico de datos climáticos”, BMRC Climate Change, Universidad de la Republica de Montevideo, Uruguay, 2008.

4 Urquiaga Mergarejo, I. y otros, “Cultura por la calidad”, tabloide especial, Universidad para todos, Ed. Academia, Cuba, 2006.
5 Cartaya Saiz, O., “Introducción al Laboratorio de física. Fundamento a la teoría de los errores”, Ed. Pueblo y educación, 1986. Cuba.
6 Maya Perez, R., Estadística 2, Inferencia y tablas estadísticas, Ed. La muralla, 2004, Buenos Aires ISBN 84- 7288-196-2.
7 Spiegel y Murray, *Estadística*, 2da ed., McGraw Hill, Schaum, Madrid ,1995. ISBN 84-7615-562-X.
8 Delfino, C. Sobre la propagación de errores en las mediciones indirectas, Revista Mexicana de Física, 32, No.1,1985 páginas 169-173