

Mecanismos de palanca. Apuntes.

Orestes González Quintero
Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de de Ingenierías Química y Mecánica



2007

1.- Introducción.

El análisis de los mecanismos y máquinas tiene por objetivo comprender la relación entre el movimiento de las partes de la máquina y las fuerzas que producen el movimiento. El problema inicial en el diseño o análisis de un sistema mecánico es la determinación del movimiento del sistema. El estudio del movimiento es denominado cinemática, siendo el análisis cinemático el objetivo primario de este trabajo.

Como problema secundario debe ser seleccionada la fuente de energía que proveerá la fuerza suficiente para operar la máquina. Al estudio de las fuerzas dinámicas también se le dedica un espacio en este análisis.

2.- Técnicas para el análisis de los mecanismos.

La mayoría de los análisis de mecanismos involucran a la geometría. A menudo son empleados los métodos gráficos debido a que el movimiento de los mecanismos puede ser visualizado claramente.

Las soluciones gráficas incluyen el dibujo a escala de líneas a un ángulo especificado, por ejemplo el dibujo de un diagrama cinemático. La solución gráfica concierne la preparación del dibujo donde todos los elementos son mostrados a una escala proporcional al mecanismo real. La orientación de los elementos también debe ser mostrada al mismo ángulo que en el mecanismo real.

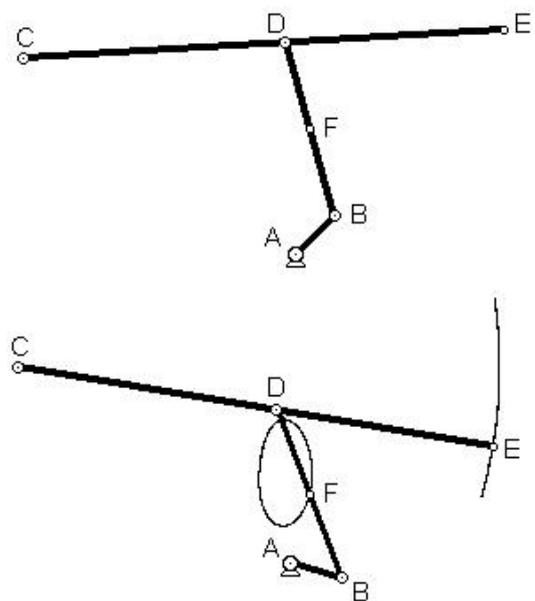
Este criterio gráfico tiene como méritos su facilidad y la visualización de la solución, sobre todo con el desarrollo actual de los sistemas CAD (Computer-Aided Design), que han permitido que los criterios gráficos sean aplicados con precisión.

3.- Construcción de los planos de un mecanismo.

La posición recíproca de los elementos de un mecanismo en movimiento varía constantemente, pero en cada instante la posición de estos es completamente determinada. La representación gráfica de la posición recíproca de los elementos, que corresponde a un momento dado, se denomina plano del mecanismo. Una serie sucesiva de planos de un mecanismo, construida para momentos consecutivos, permite seguir el movimiento de dicho mecanismo.

El propósito primario del análisis de un mecanismo es estudiar su movimiento. El movimiento es la acción de cambio de posición de los eslabones en un mecanismo, y de los puntos en aquéllos eslabones. Como la posición de los eslabones es alterada, el mecanismo es forzado a una configuración diferente.

La posición de un punto en un mecanismo es la situación espacial de ese punto. Al pasar el mecanismo a una nueva configuración, el punto adjunto firmemente al mismo se mueve junto con él. La posición del punto, o su trayectoria, puede verse visualmente dibujando el punto en el mecanismo o en su esquema cinemático. Formalmente, el punto puede localizarse usando las coordenadas en algún sistema de coordenada de referencia. Para la mayoría de los análisis, es suficiente mostrar la posición de un punto en un boceto del mecanismo. En la siguiente figura se muestran dos posiciones del movimiento de un mecanismo, así como la trayectoria de los puntos E y F luego de completar el elemento motriz un



giro de 360°. Generalmente para determinar la trayectoria de algún punto se necesitan entre 12 y 24 posiciones del mecanismo.

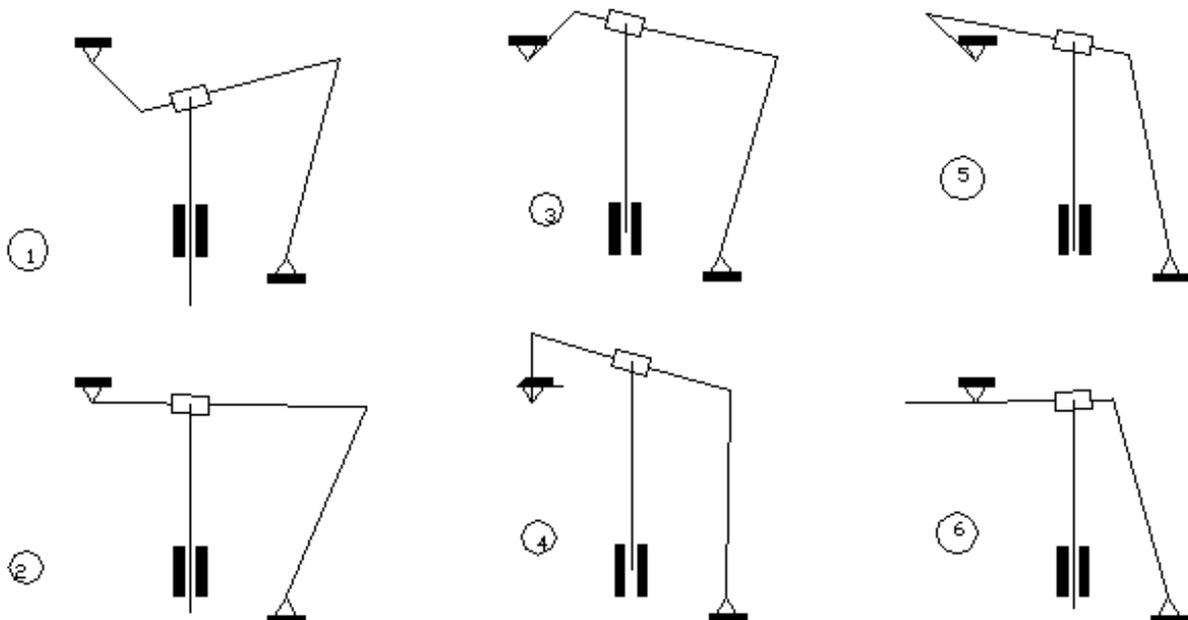
Recordemos que una propiedad importante de un mecanismo es su grado de movilidad o número de grados de libertad. Para las uniones con un grado de libertad, la posición de un eslabón o punto puede determinar con precisión la posición de todos los otros eslabones o los puntos. Igualmente, para las uniones con dos grados de libertad, la posición de dos eslabones puede determinar precisamente la posición de todos los otros eslabones. Por consiguiente, las posiciones de los puntos y eslabones en un mecanismo no son arbitrarias e independientes. Los grados de libertad son el número de parámetros independientes requeridos para especificar la posición de cada eslabón en un mecanismo. Los parámetros independientes son las posiciones de ciertos eslabones motrices. La mayoría de las uniones prácticas tienen un grado de la libertad. La meta primaria del análisis de la posición es determinar la posición resultante de los puntos en un mecanismo como una función de la posición de algunos puntos "conductores".

Para la construcción del plano del mecanismo, con la utilización del Autocad, en distintas posiciones, hay que seguir la misma metodología que se usa normalmente al trabajar manualmente con instrumentos de dibujo, se necesita tener todas las dimensiones del mecanismo, incluyendo la distancia entre los apoyos o alguna relación geométrica entre ellos así como la posición de uno de los elementos para un momento dado.

La construcción del plano de un mecanismo involucra el trazado de líneas a una longitud precisa y a un ángulo específico. La siguiente lista esboza las capacidades de CAD requeridas para el análisis vectorial. Los usuarios deben ser capaces de:

- Trazar líneas a una longitud y ángulo especificado.
- Insertar líneas perpendiculares a las ya existentes.
- Extender las líneas existentes hasta su intersección con otra línea.
- Trazar arcos y círculos desde un punto especificado y con un radio dado.
- Localizar la intersección de dos arcos.
- Medir la longitud de las líneas existentes.
- Medir el ángulo entre dos líneas.

A continuación se muestra un mecanismo plano de bombeo en diversas posiciones.



4.- Escalas.

En las construcciones graficas, a veces se requiere representar en el dibujo no solo las longitudes de los elementos, como se hizo para la construcción de los planos del mecanismo, sino las velocidades y aceleraciones de distintos puntos, así como también las fuerzas y otras magnitudes. Por esto en la Teoría de los Mecanismos se utiliza un coeficiente llamado coeficiente de escala. Si una magnitud cualquiera D (por ejemplo la longitud l, velocidad V, aceleración a, etc.) está representada en el dibujo por un segmento que tiene una longitud O, entonces como coeficiente de escala k, con ayuda de la cual esta magnitud ha sido representada, se denomina al cociente D/O. De este modo el coeficiente de escala es:

$$k = D / O$$

Midiendo el segmento O y conociendo el coeficiente de escala se puede determinar la magnitud D, según la formula:

$$D=k.O$$

Para representar la magnitud D mediante el coeficiente de escala k, es necesario trazar un segmento cuya longitud es:

$$O=D/k$$

Generalmente el coeficiente de escala k, va acompañado por un índice que indica la magnitud a la se refiere. Por ejemplo:

- k_l , coeficiente de escala de longitud,
- k_v , coeficiente de escala de velocidad,
- k_a , coeficiente de escala de aceleración,
- k_p , coeficiente de escala de fuerza, etc.

Las magnitudes de longitud, velocidad, aceleración, fuerza, etc., son expresadas según el Sistema Internacional de Unidades, es decir corresponden respectivamente a m, m/s, m/s^2 , N, etc. La longitud del segmento O siempre se mide en mm. Por esto el coeficiente de escala es una magnitud dimensional, así:

- k_l se expresa en m/mm,
- k_v se expresa en m/s.mm,
- k_a se expresa en m/s^2 .mm,
- k_p se expresa en N/mm, etc

5.- Principales ecuaciones para determinar las velocidades y aceleraciones.

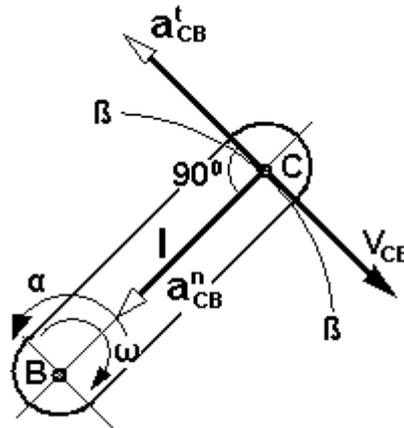
Se pueden presentar dos casos en los cuales es necesario saber establecer las ecuaciones vectoriales de **v** y **a** durante el análisis cinemático por métodos gráficos:

- Dos puntos pertenecen a un elemento y están separados entre si una distancia l .
- Dos puntos pertenecen a dos elementos que forman un par de traslación y coinciden en un momento dado.

5.1- Dos puntos pertenecen a un elemento y están separados entre si una distancia l .

Si dos puntos A y B pertenecen a un mismo elemento y están separados por una distancia l , entonces la velocidad V_{BA} y la aceleración a_{BA}^t están dirigidas perpendicularmente a la línea AB y se relacionan con La velocidad y aceleración angulares de este elemento. El miembro medio de la fórmula 5, representa la aceleración normal, dirigida paralelamente a la línea AB (de B a A).

1. $\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}$
2. $\vec{V}_{CB} = l_{CB} \omega$
3. $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}$
4. $\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t$
5. $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t$
 $a_{CB}^n = l_{CB} \omega^2 = \frac{V_{CB}^2}{l_{CB}}$
6. $a_{CB}^t = l_{CB} \alpha_{CB}$



5.2- Dos puntos pertenecen a dos elementos que forman un par de traslación y coinciden en un momento dado.

El cálculo de las velocidades de eslabones con movimiento, los cuales están conectados a través de pares cinemáticos de traslación involucra el uso de puntos coincidentes que residen en los dos cuerpos. Típicamente, la dirección del movimiento de traslación es conocida; por consiguiente, la dirección de la velocidad relativa de los puntos coincidentes también lo es. Ésta información es suficiente para determinar el movimiento de los eslabones conducidos.

5.3- Aceleración de Coriolis.

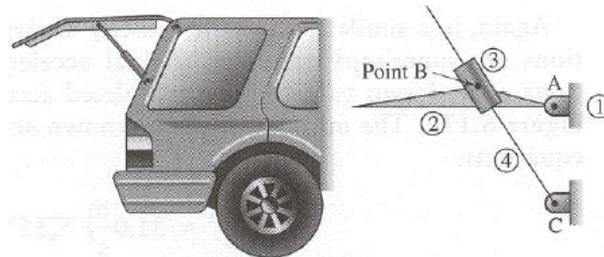
A lo largo de los análisis precedentes, fueron analizados a fondo las componentes normal y tangencial del vector aceleración. En ciertas condiciones, un tercer componente de la aceleración es encontrado. Este componente adicional es conocido como aceleración de Coriolis o de giro, estando presente en los casos donde ocurre un contacto de deslizamiento entre dos eslabones con movimiento de rotación.

Se sabe de mecanismos usados en máquinas que han fallado debido a errores por la omisión del componente de Coriolis. La omisión del componente de Coriolis resta validez a la aceleración del eslabón y a las fuerzas de inercia asociadas a esta. Por lo tanto, las tensiones reales en los componentes de la máquina pueden ser más grandes que las que brindan los cálculos y el fallo podría ocurrir. Por lo tanto, debe ser estudiada cada situación para determinar si existe el componente aceleración de Coriolis.

Específicamente, el componente de Coriolis es encontrado en la aceleración relativa de dos puntos cuando cada una de las siguientes tres condiciones están presentes simultáneamente:

1. Los dos puntos son coincidentes pero en diferentes eslabones.
2. El punto de un eslabón tiene su trayectoria en el otro eslabón, y,
3. El eslabón que contiene la trayectoria rota.

La siguiente figura ilustra la puerta trasera de un mini van así como el diagrama cinemático relacionado. Note que el punto B puede ser asociado con cualquiera de los eslabones 2, 3 ó 4. Para clarificar la asociación con el eslabón el punto B es referido como B2, B3 ó B4. Hasta ahora puntos coincidentes en diferentes eslabones con movimiento de rotación tenían la misma aceleración porque solo fueron usados pares cinemáticos de rotación para unir los dos eslabones. En la siguiente figura, son usados pares cinemáticos de rotación y de deslizamiento para unir dos eslabones con movimiento de rotación, eslabones 2 y 4, en este caso, las velocidades y aceleraciones de B2 y B4 no son las mismas.



Las ecuaciones para el movimiento relativo pueden ser usadas para asociar las velocidades y aceleraciones como sigue:

$$V_{B4} = V_{B2} + V_{B4B2}$$

$$a_{B4} = a_{B2} + a_{B4B2}$$

Esta situación representa el caso de análisis de mecanismos donde debe ser incluido el componente de Coriolis en el término aceleración relativa a_{B4B2} . Nótese que:

1. Los dos puntos son coincidentes pero no en el mismo eslabón.
2. El punto B2 tiene su trayectoria a lo largo del eslabón 4, y,
3. El eslabón que contiene la trayectoria, eslabón 4, rota.

La separación de los términos de la aceleración relativa en sus componentes conduce a lo siguiente:

$$a_{B4B2} = a_{B4B2}^n + a_{B4B2}^t + a_{B4B2}^c$$

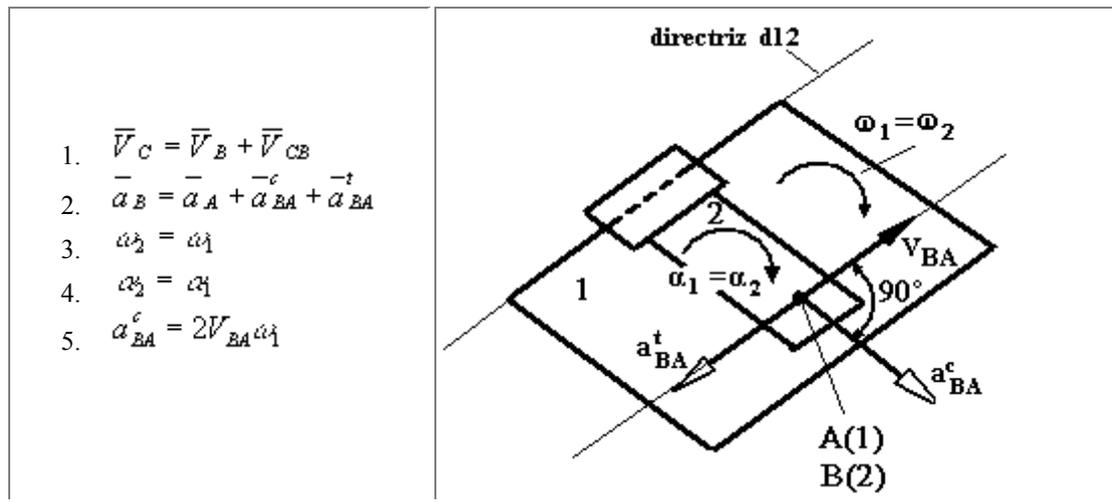
Donde a_{B4B2}^c es el componente aceleración de Coriolis. La magnitud del componente de Coriolis ha sido derivado como:

$$a_{B4B2}^c = 2V_{B4B2}\omega_2$$

Tanto la velocidad lineal relativa como la velocidad angular absoluta pueden ser determinadas a través del análisis de velocidad del mecanismo. la velocidad angular, ω , que se considera debe ser la del eslabón que contiene la trayectoria del punto de traslación. Un error común en el cálculo del componente de Coriolis es la selección errónea de la velocidad angular por lo que se deben tomar precauciones en ese sentido. La dirección del componente de Coriolis es perpendicular al vector de la velocidad relativa, V_{B4B2} . El sentido es obtenido por la rotación del vector de la velocidad relativa de manera que la cabeza del vector rote en la dirección de la velocidad angular de la

Como la magnitud y dirección del componente de Coriolis pueden ser fácilmente calculados a partir de los datos del análisis de las velocidades, su inclusión en la ecuación de la aceleración no introduce magnitudes incógnitas adicionales.

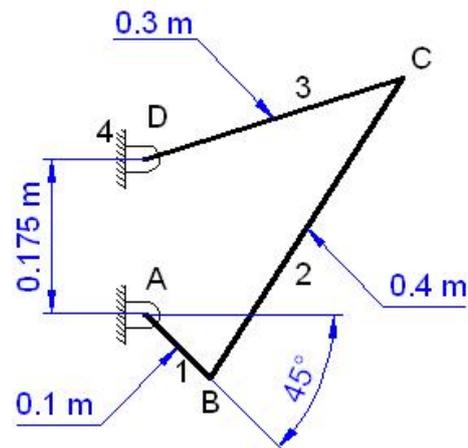
Resumiendo, si los puntos A y B pertenecen a dos elementos que forman un par de traslación con la directriz d12 entonces la velocidad V_{BA} y la aceleración a_{BA} están dirigidas paralelamente a d12. El miembro medio en la fórmula 2 es la aceleración de Coriolis (de giro), esta se orienta hacia aquel lado al que ya está orientado el vector V_{BA} , girando este último un ángulo de 90° en dirección de la velocidad angular.



6.- Ejemplo de solución de un problema con el auxilio de AutoCAD y Excel.

Como ha sido mencionado con anterioridad, el criterio de análisis vectorial involucra el trazado de líneas a una longitud precisa y a un ángulo específico, por su parte en las hojas de cálculo, cuando el contenido de una celda de entrada de datos es cambiado, son actualizados todos los otros resultados. Esto permite diseñar iteraciones que serán completadas con facilidad.

6.1- Problema 1: La figura muestra el diagrama cinemático de un mecanismo de cuatro barras (de charnela). En la posición mostrada y usando el método gráfico determine la velocidad y la aceleración de los puntos B y C y la de los eslabones 2 y 3 cuando la manivela 1 gira a 60 min^{-1} en sentido contrario a las manecillas del reloj.



$$n_1 = 60 \text{ min}^{-1}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{\pi n_1}{30} = 6,28 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Hoja de cálculo: "Análisis cinemático de mecanismos de charnela de cuatro elementos", disponible en:

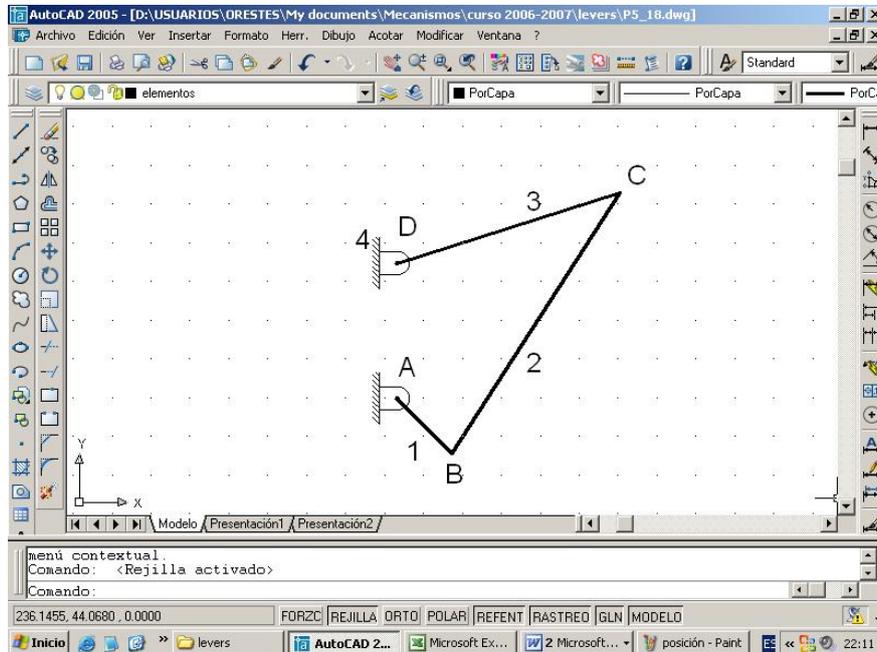
http://www.fiqm.umcc.cu/dptos/mecanica/mecaplic/mecanismos/pages/Index_Excel.htm

entrada de datos
valores calculados



Determinación del factor de escala de longitud, escalado de los eslabones y construcción del plano del mecanismo.

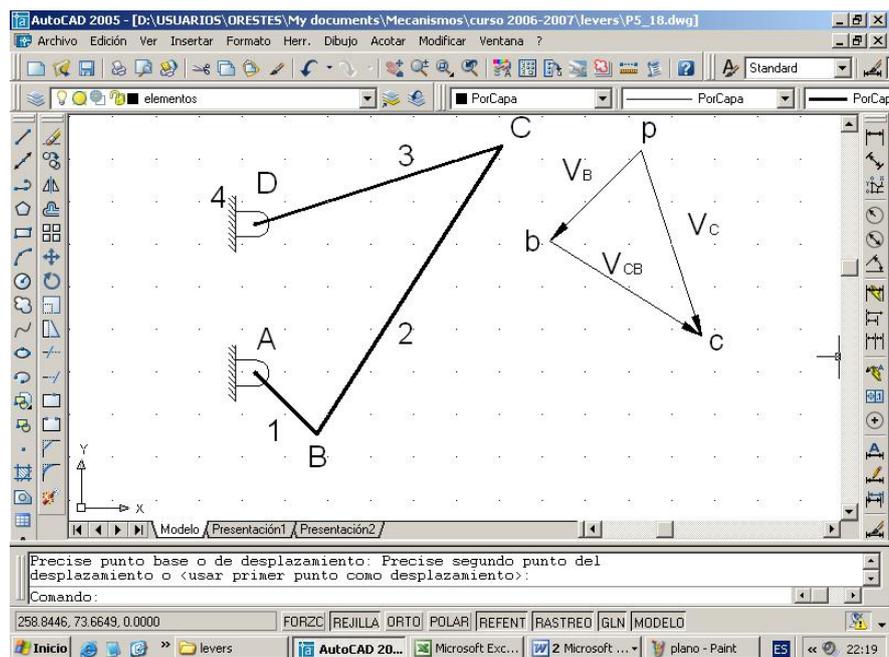
L1 (AB) m	L2 (BC) m	L3 (CD) m	ω_1 rad/s	AB mm	KI m/mm	BC mm	CD mm
0,1	0,4	0,3	6,28	20	0,005	80	60



Determinación de las velocidades lineales y angulares:

VB m/s	pb mm	Kv m/(s.mm)
0,628	30	0,021

Trazado del diagrama de Velocidad y determinación de las velocidades restantes.

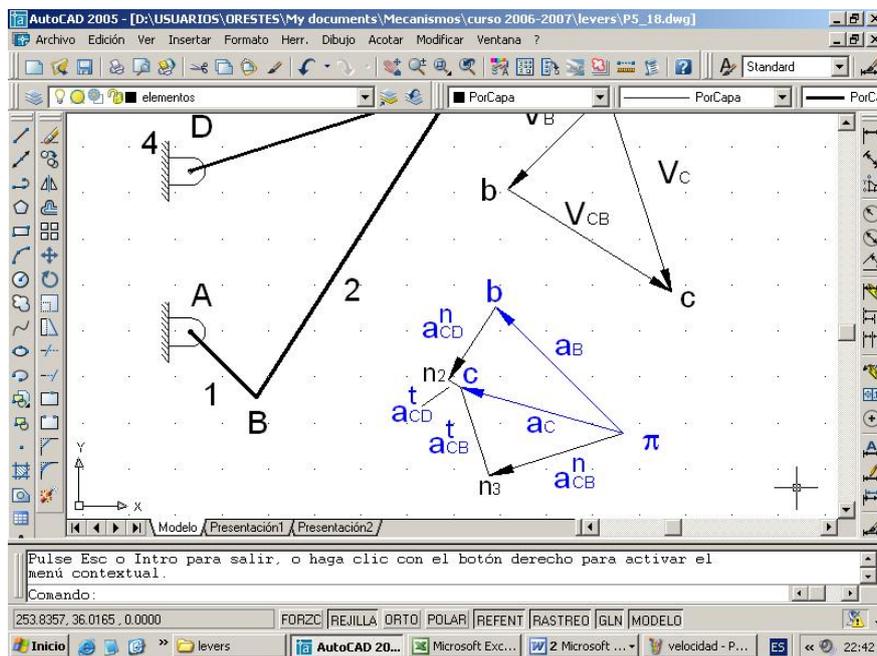


bc mm	pc mm	V CB m/s	VC=V CD m/s	ω_2 rad/s	ω_3 rad/s
41,76	45,84	0,87	0,96	2,19	3,20

Determinación de las aceleraciones lineales y angulares.

a_B m/s ²	πb mm	Ka m/(s ² .mm)	aCB normal m/s ²	aCD normal m/s ²	b n2 (aCB normal) mm	$\pi n3$ (aCD normal) mm
3,94	39	0,10	1,91	3,07	18,89	30,35

Trazado del diagrama de aceleraciones y cálculo de las incógnitas.



n2c mm	n3c mm	πc mm	aCB tangencial m/s ²	aCD tangencial m/s ²	aC m/s ²	α_2 rad/s ²	α_3 rad/s ²
20,182	3,1598	36,4477	2,04	0,32	3,69	5,10	1,07

Y así el problema queda resuelto.

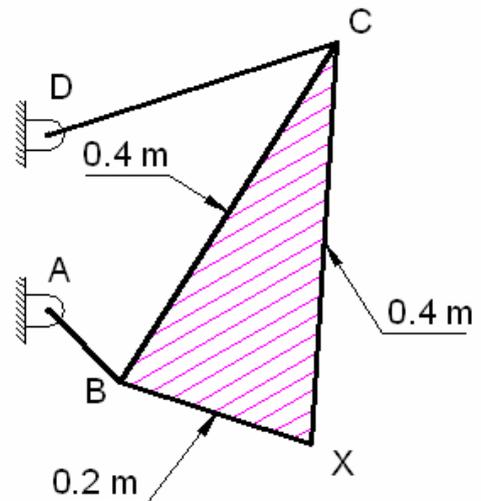
V_B m/s	V_C m/s	ω_2 rad/s	ω_3 rad/s	a_B m/s ²	a_C m/s ²	α_2 rad/s ²	α_3 rad/s ²
0,63	0,96	2,19	3,20	3,94	3,69	5,10	1,07

6.2- Análisis cinemático de mecanismos con un punto "flotante".

Supongamos que al mecanismo del problema anterior se le añade un punto "flotante" X como se muestra en la figura del Problema 2. En todos los casos cuando son conocidas las velocidades de dos puntos de un elemento, las velocidades de todas las demás partes de este deberán buscarse no empleando las ecuaciones de velocidades, sino

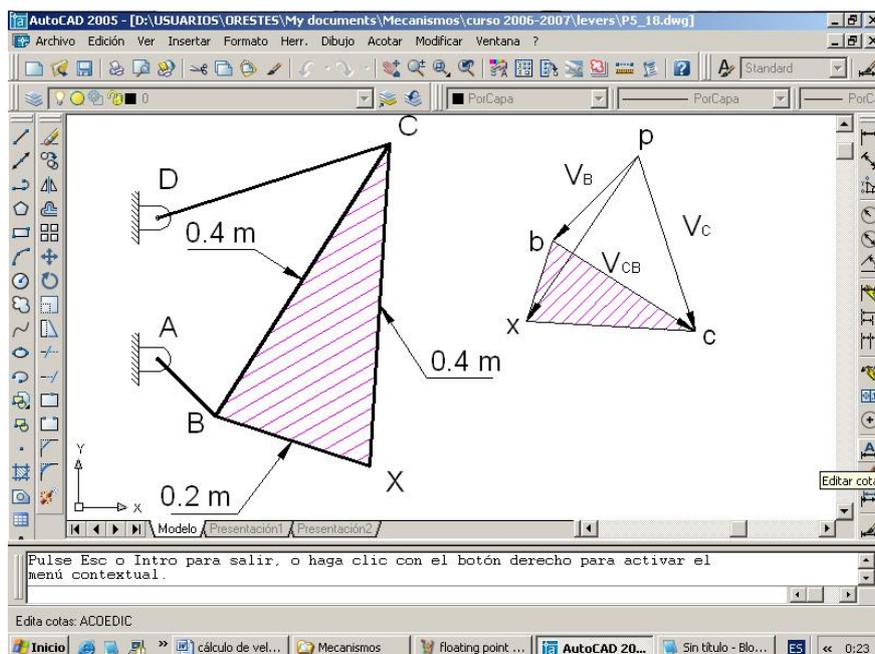
basándonos en el Teorema de Semejanza de las Velocidades o utilizando la proporcionalidad de los lados correspondientes (Baránov, p61).

6.3- Problema 2: Determine la velocidad y aceleración absolutas en el punto de interés X para la posición que se indica, si se conocen las velocidades de los puntos B y C



Para hallar la velocidad de los puntos, considerando que las velocidades de B y C son conocidas y se indican en el diagrama de velocidades por los trazos pb y pc . Por el punto b trazamos una línea perpendicular a BX y por el punto c, una línea perpendicular a CX. En la intersección de estas líneas encontramos el punto x, trazando luego el vector px que es el que representa la velocidad del punto X. Siendo la velocidad del punto X igual a:

px mm	Kv m/(s.mm)	VX m/s
49,52	0,021	1,04



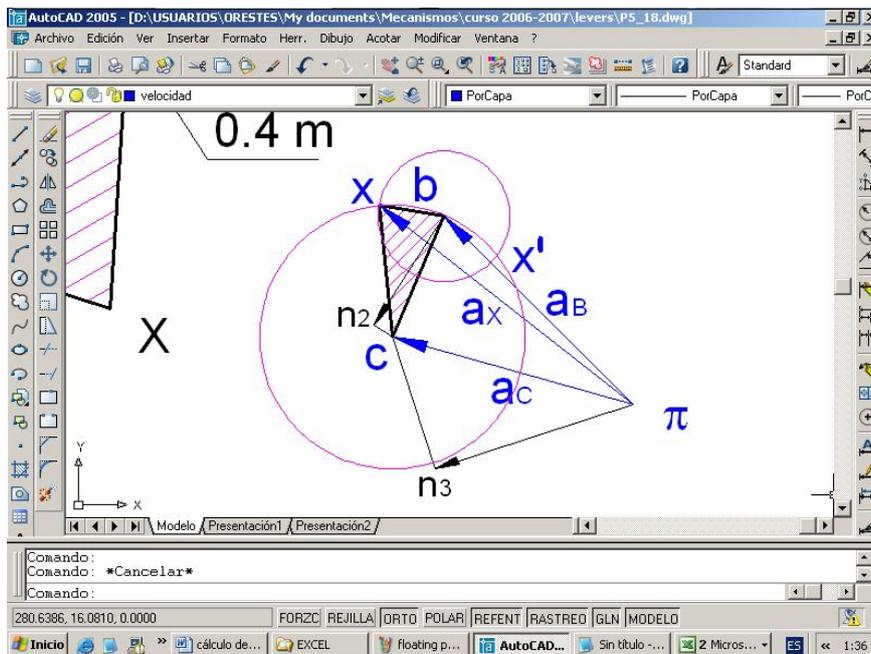
La aceleración total del punto X, considerando que las aceleraciones totales de los puntos B y C son conocidas y representadas en el diagrama de aceleraciones por los segmentos \overline{pb} y \overline{pc} , los segmentos \overline{bx} y \overline{cx} los encontraremos con las siguientes proporciones:

$$\overline{bx} = \overline{BX} \frac{\overline{bc}}{\overline{BC}} \qquad \overline{cx} = \overline{CX} \frac{\overline{bc}}{\overline{BC}}$$

BX m	CX m	BC m	bc mm	bx mm	cx mm
0,2	0,4	0,4	19,15	9,575	19,150

Aplicando los segmentos hallados como radios trazamos circunferencias alrededor de los puntos b y c. la intersección de estas circunferencias ocurre en los puntos x y x'.

El punto correcto (x), es aquel en el que se cumple la regla del recorrido de los contornos (Baránov, p64), resultando ser el triángulo rayado mostrado en la figura (bcx) el que se corresponde con el triángulo BCX en el plano del mecanismo (ambos recorridos en sentido horario), trazando inmediatamente el vector $\overline{\pi x}$ que es el que representa la aceleración del punto X



Cálculo de la aceleración de X:

Ka m/(s ² .mm)	πX mm	aX m/s ²
0,101	47,13	4,77

6.4- Problema 3: La rampa alimentadora 3 de un laminador se regula en altura a partir de la posición de la manivela motriz 1.

- Determine el grado de movilidad del mecanismo.
- Clasifique el mecanismo.
- Determine la velocidad y aceleración absolutas en los pares cinemáticos B, D y C así como en el punto de interés E para la posición que se indica.

aCB tangencial m/s ²	aCD tangencial m/s ²	aC m/s ²	α_2 rad/s ²	α_3 rad/s ²
0,38	0,34	0,39	0,22	0,13

Como el punto flotante E se encuentra en línea con los puntos D y C siendo conocidas las velocidades de estos, entonces calculamos basándonos en la proporcionalidad la longitud del segmento ce del diagrama de velocidades:

$$ce = CE \frac{dc}{DC} = 2m \frac{21.22mm}{2,5m} = 16,976mm$$

Análogamente se determina la longitud del segmento ce en el diagrama de aceleraciones:

$$ce = CE \frac{dc}{DC} = 2m \frac{35,29mm}{2,5m} = 63,522mm$$

De ahí que la velocidad y aceleración absolutas en el punto de interés E sea:

V _E m/s	a _E m/s ²
0,80	0,70

Figura 1.

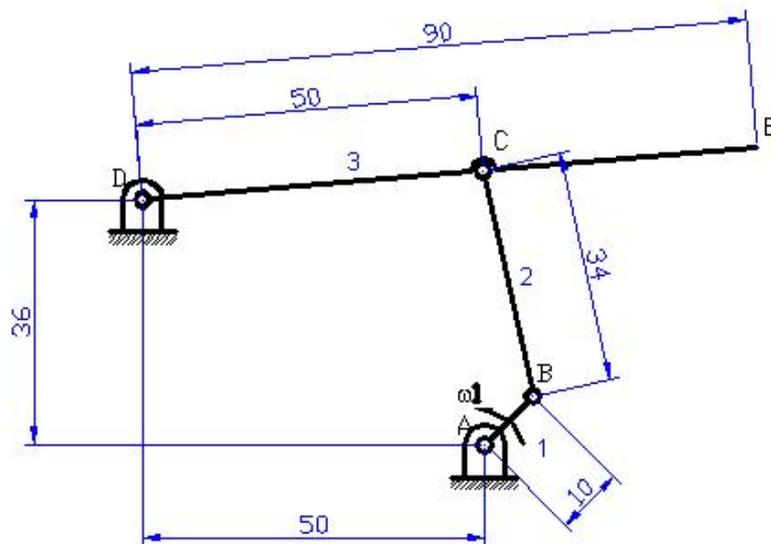


DIAGRAMA DE VELOCIDAD

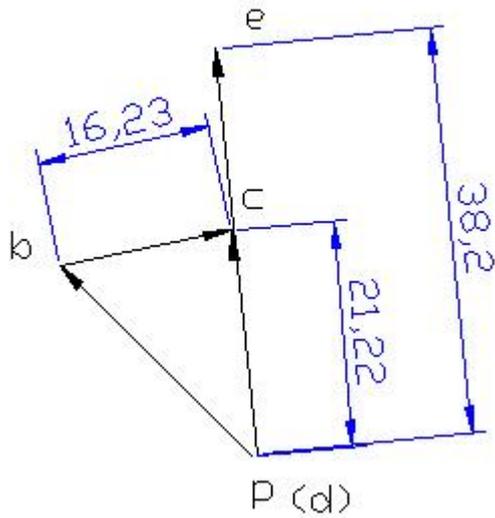


Figura 2.

DIAGRAMA DE ACELERACION

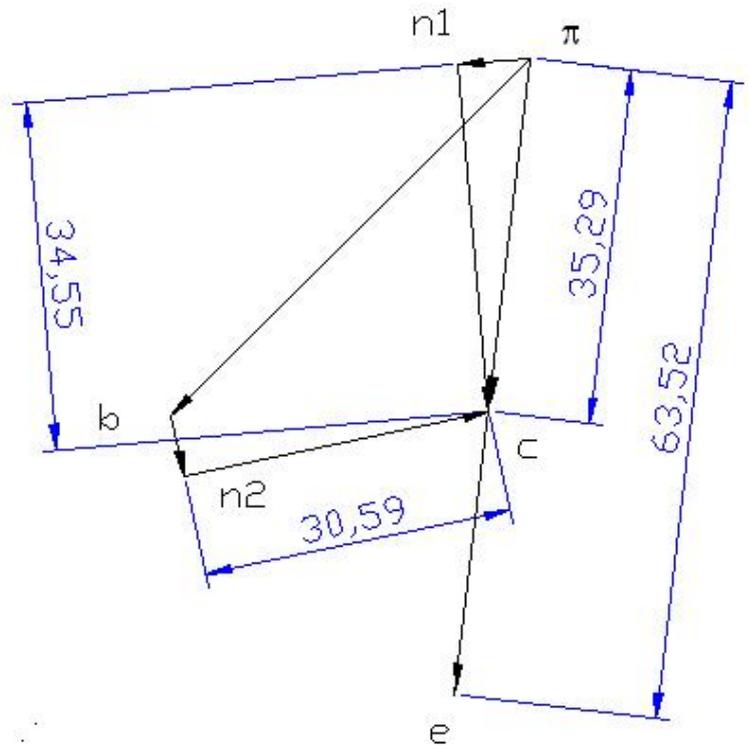


Figura 3

Y así el problema queda resuelto.

V_B m/s	V_C m/s	V_E m/s	ω_2 rad/s	ω_3 rad/s	a_B m/s ²	a_C m/s ²	a_E m/s ²	α_2 rad/s ²	α_3 rad/s ²
0,525	0,45	0,80	0,20	0,18	0,55	0,39	0,70	0,22	0,13

7.- Determinación de las fuerzas en los mecanismos de palanca.

En esta parte del tema se tratará uno de los métodos para el análisis de fuerzas en los mecanismos de palanca de segunda clase, que son los más empleados en la práctica contemporánea. El método a emplear será el grafo-analítico, siendo el objetivo del análisis de fuerzas la determinación de las reacciones en los pares cinemáticos del mecanismo, así como la determinación de la fuerza y/o el momento equilibrante en el elemento primario.

Sobre cada elemento de los mecanismos actúan fuerzas ejercidas por otros elementos que forman con los primeros pares cinemáticos. Estas fuerzas están aplicadas en las superficies de contacto de estos pares y en lo adelante las llamaremos reacciones en los pares cinemáticos.

Por lo común los problemas relacionados con la acción de las fuerzas en los mecanismos y máquinas son unificadas en la parte denominada “dinámica de mecanismos y máquinas”.

El análisis de las fuerzas tiene gran importancia, ya que empleando las fuerzas encontradas se calcula la resistencia mecánica de las superficies de contacto en los pares cinemáticos y de todos los elementos del mecanismo.

El cálculo de las fuerzas es un problema en el que usualmente se conocen:

1. Las dimensiones fundamentales de todos los elementos del mecanismo.
2. Las masas y momentos de inercia de los elementos.
3. La ley de movimiento del elemento motriz.
4. Las fuerzas exteriores que se aplican al mecanismo.

Determinación de las fuerzas de inercia (Pi).

La fuerza de inercia representa por sí, una reacción, que surge durante cualquier cambio de movimiento relativo, se manifiesta como una acción del elemento sobre sus vinculaciones con otros elementos.

Pi en el movimiento rectilíneo.

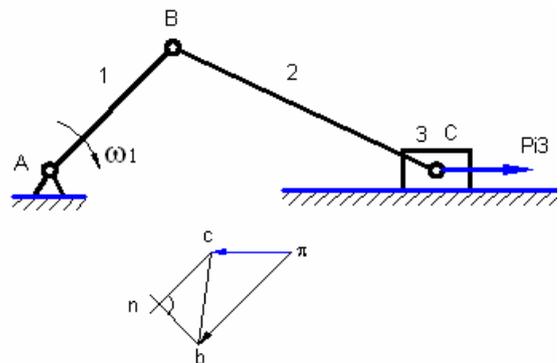
$$P_{i3} = -m a_c$$

Donde:

m- masa del elemento 3.

a_c- aceleración absoluta en el centro de gravedad.

El signo menos indica que Pi está dirigida en sentido contrario al de la aceleración.



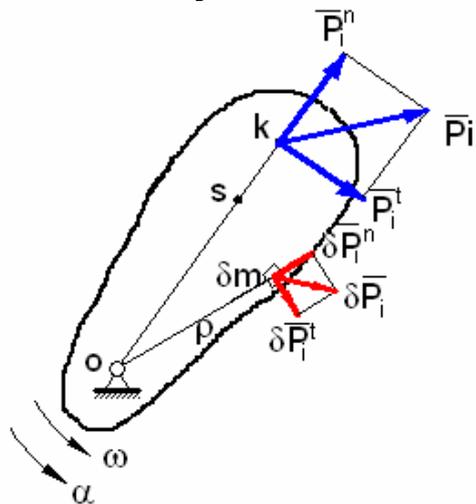
Pi en el movimiento circular

$$\delta \bar{P}_i^t = -\bar{a}^t \delta m = -\bar{\alpha} \rho \delta m$$

$$\delta \bar{P}_i^n = -\bar{a}^n \delta m = -\bar{\omega}^2 \rho \delta m$$

$$\bar{P}_i^t = -\int_m \bar{\alpha} \rho \delta m = -\bar{\alpha} \int_m \rho \delta m$$

$$\bar{P}_i^n = -\int_m \rho \omega^2 \delta m = -\bar{\omega}^2 \int_m \rho \delta m$$



La expresión $\int_m \rho \delta m$ es el momento estático del elemento respecto al eje de rotación, siendo $\int_m \rho \delta m = m l_{os}$, donde, m es la masa del elemento, y l_{os}, la distancia entre el centro de gravedad del elemento y el eje de rotación o.

Así se obtiene:

$$\bar{P}_i^t = -l_{os} \bar{\alpha} m = -a_s^t m$$

$$\bar{P}_i^n = -l_{os} \bar{\omega}^2 m = -a_s^n m$$

La fuerza total es:

$$\bar{P}_i = \bar{P}_i^t + \bar{P}_i^n = -m \bar{a}_s$$

Recordando que $I_o = I_s + ml_{os}^2$ (Teorema de los ejes paralelos) y considerando $x = l_{os} + l_{sk}$:

$$x = \frac{I_s + ml_{os}^2}{ml_{os}} = l_{os} + \frac{I_s}{ml_{os}}$$

$$l_{sk} = \frac{I_s}{ml_{os}}$$

El punto k (punto de aplicación de la fuerza total) está situado en la prolongación de la recta que une al eje de rotación "o", con el centro de gravedad "s".

Casos particulares

1. Si $\omega = \text{Cte.}$ entonces $\alpha = 0$ y $P_i^t = 0$, en este caso:

$$P_i = \bar{P}_i^n = -ml_{os} \omega^2 = -m \bar{a}_s^n$$

Se aplica en el centro de gravedad en sentido contrario a la aceleración a_s .

2. Si el centro de gravedad coincide con el eje de rotación pueden presentarse dos casos:

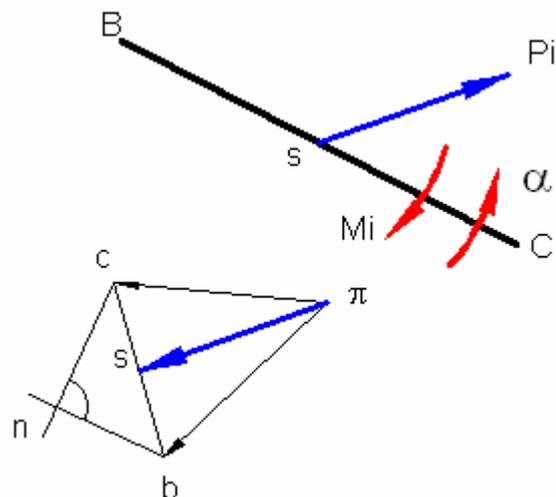
a) Si $\alpha \neq 0$ entonces $\bar{P}_i = -m \bar{a}_s = 0$ porque $a_s = 0$ no obstante tiene lugar el momento de las fuerzas de inercia:

$$\bar{M}_i = -\bar{\alpha} \int_m \rho^2 \delta m = -\bar{\alpha} I_s$$

b) Si $\alpha = 0$ y $\omega = \text{Cte.}$ entonces $P_i = 0$ y $M_i = 0$

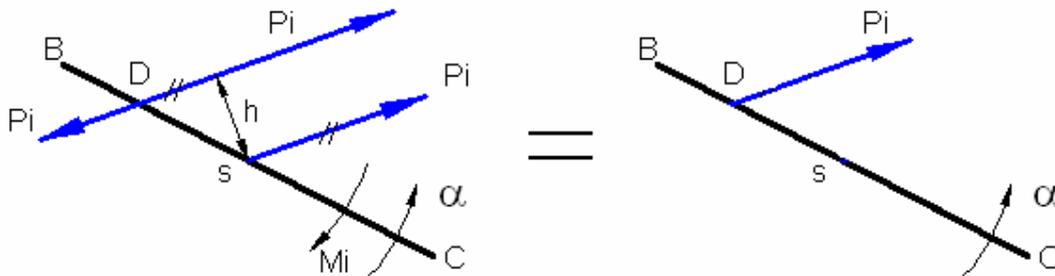
Caso general del movimiento plano.

El movimiento plano se descompone en el movimiento rectilíneo del elemento a la par con el centro de gravedad y en el movimiento de rotación del elemento alrededor del centro de gravedad. Durante el primer movimiento surge la fuerza de inercia que está aplicada en el centro de gravedad del elemento en sentido contrario a la aceleración de dicho punto. En el proceso del segundo movimiento surge el momento de las fuerzas de inercia:



Este momento de las fuerzas de inercia M_i está dirigido contrario al de la aceleración angular α .

El momento M_i y la fuerza P_i se pueden reducir a una fuerza. Para esto es necesario desplazar la fuerza de inercia P_i paralelamente a si misma una distancia h , de tal modo que el signo del momento de dicha fuerza, en su nueva posición con respecto al centro de gravedad del elemento coincida con el signo de M_i .



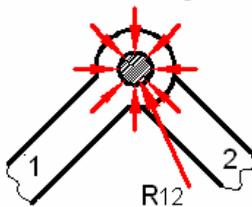
$$\bar{M}_i = -\bar{\alpha} I_s = \frac{-a_{CB}^t}{l_{CB}} I_s = \frac{-nck_a}{BCK_1} I_s$$

$$h = \frac{M_i}{P_i}$$

8.- Determinación estática de la cadena cinemática plana.

El análisis de las fuerzas lo realizaremos, sin tener en cuenta las fuerzas de rozamiento. Al no existir dichas fuerzas, la fuerza de interacción entre dos elementos siempre estará dirigida por una normal a la superficie de su contacto.

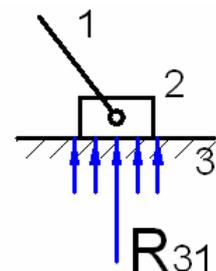
En el caso de un par cinemático de rotación de la V clase, generalmente se sabe que la reacción R (R_{12} o R_{21}) está dirigida hacia el centro de la charnela, por lo general se desconoce su magnitud y dirección.



R_{12} ---- Acción del elemento 1 sobre el 2 ($R_{12} = -R_{21}$).

Para un par de deslizamiento de la V clase, sólo se conoce la dirección de la reacción, normal a la superficie de contacto, se desconoce la magnitud y punto de aplicación.

Así cada par cinemático tiene dos parámetros desconocidos o incógnitas. Para la determinación de las mismas para cada elemento se pueden escribir tres condiciones de equilibrio:



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

Los grupos estructurales son estáticamente determinados y se pueden determinar todas las reacciones de sus pares.

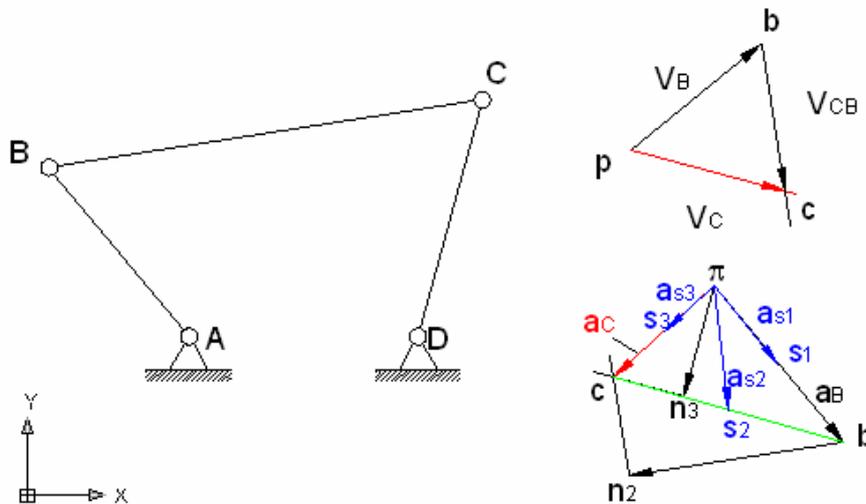
8.1- Ejemplo de cálculo de fuerza.

El cálculo de fuerzas es un problema dinámico en el que es necesario determinar:

1. Las reacciones en los pares cinemáticos.
2. El momento motriz que es necesario aplicar al elemento motriz.

Para resolver este problema se aplica el Principio de D’Alambert, que plantea que cualquier sistema estará en equilibrio, si a todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo se le añaden las fuerzas de inercia correspondientes. En este caso cualquier sistema que se mueve, se examina como un sistema que está en reposo.

Considérese el siguiente mecanismo de charnela en la posición dada:



Datos: ω_1 , l_{AB} , l_{BC} , l_{CD} , m_1 , m_2 , m_3 , s_1 , s_2 , s_3 , I_{s1} , I_{s2} , I_{s3} .

Se construyen los diagramas de velocidad y aceleración y se determinan: ω_2 , ω_3 , α_1 , α_2 , α_3 , a_{s1} , a_{s2} , a_{s3} .

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{BC}} = \frac{\overline{bc}k_V}{l_{BC}}, \quad \omega_3 = \frac{V_C}{l_{CD}} = \frac{\overline{pc}k_V}{l_{CD}}$$

Si $\omega_1 = \text{Cte.}$ y $\alpha_1 = 0$ entonces

$$\alpha_2 = \frac{a_{CB}^t}{l_{BC}} = \frac{\overline{n_2}c k_a}{l_{BC}}, \quad \alpha_3 = \frac{a_{CD}^t}{l_{CD}} = \frac{\overline{n_3}c k_a}{l_{CD}}$$

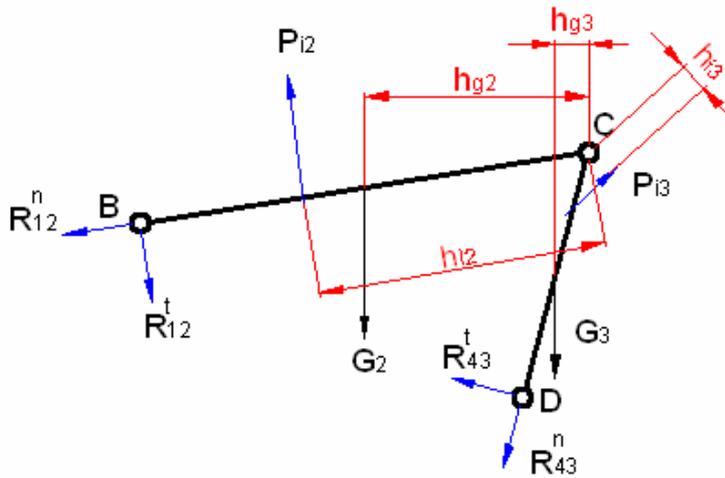
$$a_{s1} = \overline{\pi S_1} K_a, \quad a_{s2} = \overline{\pi S_2} K_a, \quad a_{s3} = \overline{\pi S_3} K_a$$

$$G_1 = m_1 g, \quad G_2 = m_2 g, \quad G_3 = m_3 g$$

$$h_2 = \frac{M_{i2}}{P_{i2}}, \quad h_3 = \frac{M_{i3}}{P_{i3}}$$

Grupo estructural.

Los brazos de todas las fuerzas se determinan gráficamente.



Según el Principio de D’Alambert este grupo estructural bajo la acción de todas las fuerzas incluyendo a las fuerzas de inercia, está en equilibrio. Por consiguiente también estará en equilibrio cada elemento de su grupo:

Elemento 2.

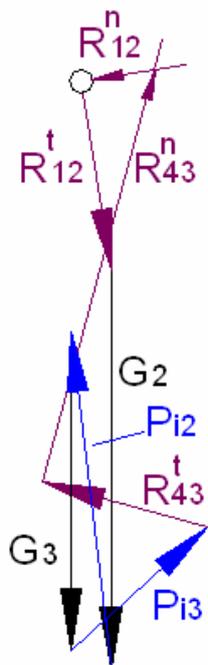
$$R_{12}^t BC + G_2(h_{g2}) - P_{12}(h_{i2}) = 0 \quad \text{de donde} \quad R_{12}^t = \frac{P_{12}(h_{i2}) - G_2(h_{g2})}{BC}$$

Elemento 3.

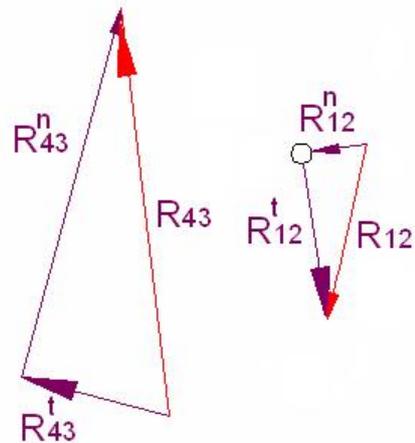
$$R_{43}^t DC - G_3(h_{g3}) - P_{13}(h_{i3}) = 0 \quad \text{de donde} \quad R_{43}^t = \frac{G_3(h_{g3}) + P_{13}(h_{i3})}{DC}$$

Para determinar las reacciones R_{12}^n y R_{43}^n se construye el diagrama de fuerzas. El polígono de fuerzas será cerrado. Se puede usar cualquiera de las fuerzas conocidas para el establecimiento de la escala de fuerzas, por ejemplo:

$$k_p = \frac{P_{12}}{P_{12}}$$



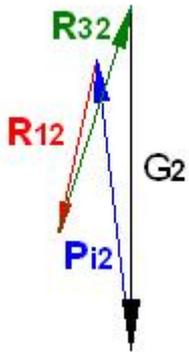
Se realiza el escalado de todas las fuerzas que actúan en el mecanismo a “mm”, dividiéndolas por el k_p hallado y se construye el polígono de fuerzas a partir del punto “o”.



$$\overline{R}_{43}^t + \overline{R}_{43}^n = \overline{R}_{43} \quad \text{y} \quad \overline{R}_{12}^t + \overline{R}_{12}^n = \overline{R}_{12}$$

Utilizando el diagrama de fuerzas se puede hallar el vector de la reacción \bar{R}_{32} o \bar{R}_{23} . El elemento 2 bajo la acción de todas las fuerzas está en equilibrio por eso el polígono de fuerzas considerado debe ser cerrado:

$$\bar{R}_{12} + \bar{G}_2 + \bar{P}_{i2} + \bar{R}_{32} = 0$$



Al unir el extremo de P_{i2} y el origen de R_{12} con una recta se obtiene el vector buscado R_{32} .

Las magnitudes reales de las reacciones son:

$$\bar{R}_{32} = -\bar{R}_{23} = k_p \bar{R}_{32}$$

$$\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21} = k_p \bar{R}_{12}$$

$$\bar{R}_{43} = -\bar{R}_{34} = k_p \bar{R}_{43}$$

Ahora se puede pasar al cálculo de las fuerzas en el elemento motriz.

M_m ----Momento motriz aplicado desde el motor.

$$\sum M_A = 0$$

$$G_1(h_{g1}) - R_{21}(h_1) - M_M = 0 \quad \text{de donde}$$

$$M_M = G_1(h_{g1}) - R_{21}(h_1)$$

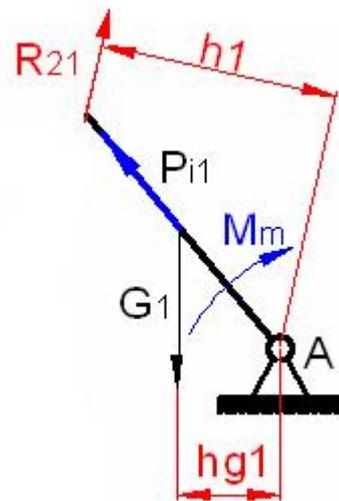
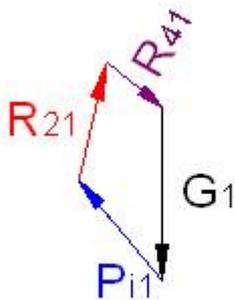


Diagrama para determinar R_{41}



$$R_{41} = k_p \bar{R}_{41}$$

Así el problema está resuelto.

La resolución de problemas sobre Cálculo de fuerzas es un caso típico donde los análisis gráficos pueden ser realizados usando procedimientos de dibujo tradicionales o usando sistemas CAD, como es comúnmente aplicado en muchas industrias. Para el análisis de los mecanismos puede ser usado cualquiera de los numerosos sistemas CAD disponibles comercialmente, encontrándose entre los mas populares AutoCAD, Microstation, Unigraphics, y ProEngineer, todos ellos tienen la capacidad de dibujar líneas con una elevada exactitud con las longitudes y ángulos designados. Esta es exactamente la capacidad requerida para el análisis gráfico de los mecanismos.

Además del incremento de la exactitud, otro beneficio del CAD es que las líneas no necesitan ser escaladas para ajustarse a un pedazo de papel de dibujo. En la computadora las líneas son dibujadas sobre un papel virtual de tamaño infinito.

Entre las soluciones computarizadas para el análisis de fuerzas se encuentran las hojas de cálculo (de Excel) de mucha utilidad durante el estudio de este contenido. Igualmente pueden ser utilizados programas de análisis disponibles comercialmente, tales como Working Model (<http://www.kw.com>), ADAMS (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems), o I-DEAS (In- tegrated Design Engineering Analysis Software).

Bibliografía

1. Baranov, G.G. Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas. Editorial MIR. Moscú. 1979. 574 Pág.
2. Golubev, Yuri. Teoría de máquinas y mecanismos. Editorial Pueblo y Educación. [La Habana]. 1978. 268 Pág.
3. Myszka, David H. Machines and mechanisms: Applied kinematic Analysis. Prentice Hall, Inc, 1999. ISBN: 0-13-597915-3.
4. González, O. Algunas Aplicaciones de la Computación en el Análisis Cinemático y Dinámico de los Mecanismos. III Taller Internacional de Didáctica de la Física. DIDACFISU 2002. ISBN 959-16-0136-0 Mechanisms and Simple Machines. Mechanism Tutorial, disponible en http://www.fiqm.umcc.cu/dptos/mecanica/mecaplic/mecanismos/pages/Tutorial_Contentents.htm
5. Basic Kinematics of Constrained Rigid Bodies. Mechanism Tutorial, disponible en http://www.fiqm.umcc.cu/dptos/mecanica/mecaplic/mecanismos/pages/Tutorial_Contentents.htm
6. Planar Linkages. Mechanism Tutorial, disponible en http://www.fiqm.umcc.cu/dptos/mecanica/mecaplic/mecanismos/pages/Tutorial_Contentents.htm
7. Shigley, J.E.; Mischke, C.R., Standard Handbook of Machine Design (2nd. Edition), McGraw-Hill, New York (USA), 1996, ISBN 0-07-056958-4.