



**UNIVERSIDAD DE MATANZAS  
"CAMILO CIENFUEGOS"  
FACULTAD DE INGENIERIAS QUÍMICA – MECANICA.**

# **MONOGRAFÍA**

## **LAS SERIES CRONOLÓGICAS EN EL MANTENIMIENTO PREDICTIVO**

Ing. Laureano Suárez Martínez<sup>1</sup>

MSc Juan Landa García.<sup>2</sup>

Lic. Yoslandy Lazo Robaina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Dpto de Ingeniería Mecánica

<sup>2</sup>Centro de Estudio de Combustión y Energía

**Noviembre, 2007**

# **LAS SERIES CRONOLÓGICAS EN EL MANTENIMIENTO PREDICTIVO.**

## **Autores:**

Ing. Laureano Suárez Martínez

MSc Juan Landa García.

Lic. Yoslandy Lazo Robaina

## **INDICE**

	<b>Pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN:</b>	2
<b>1. EL MANTENIMIENTO PREDICTIVO.</b>	3
1.1. Importancia de la previsión en el mantenimiento predictivo.	3
<b>2. SERIES CRONOLÓGICAS.</b>	3
2.1. Técnicas de previsión empleadas en series temporales.	4
2.1.1. Métodos de proyección de tendencias.	4
2.1.1.1. Identificación de tendencias (ajustes por regresión).	4
Tendencia lineal.	4
Pruebas de significación.	5
Verificación de la hipótesis de estabilidad del entorno.	6
Modelos no lineales.	7
2.1.1.2. Métodos de suavizado.	8
Suavizado por medias móviles	9
Suavizado exponencial.	10
2.1.3. Métodos clásicos de descomposición de series temporales.	11
<b>CONCLUSIONES:</b>	15
<b>BIBLIOGRAFÍA.</b>	15
<b>Anexos.</b>	19

## **INTRODUCCIÓN:**

A partir del siglo XVIII, durante la revolución industrial, aparecen las primeras operaciones de mantenimiento paliativo o curativo, aplicado a las máquinas, relacionadas con labores de reparación, ante roturas ocurridas, para devolver a estas su capacidad funcional. Muy pronto se notaría la necesidad prever el fallo, por las costosas las pérdidas causadas por la salida de servicio del equipo o la industria completa durante el tiempo de mantenimiento y con ello la planificación del mantenimiento aparece como un elemento fundamental en el funcionamiento de la industria y sus costos pasan a ser considerados como una proporción de los gastos totales de producción. [Monchy, 1990]

La industria contemporánea, centró tradicionalmente la inversión de recursos y sus esfuerzos por la mejora en función de la producción, pues de ella se derivaron habitualmente las ganancias. Pero durante el proceso de producción, ocurren inevitables roturas y desgastes del equipamiento que deben solucionarse, exigiendo incluso en ocasiones la sustitución del elemento dañado, razón por la que aparece como la variante más económica devolver la capacidad de funcionamiento a los componentes del proceso que se encuentran disminuidos con labores correctivas para reparar el desperfecto en forma rápida y barata; este criterio, avalado por el echo de que aún en la actualidad no se disponga de una tecnología suficientemente rentable y la necesidad de reciclar los insumos para garantizar una producción sostenible y disminuir la agresión al medio ambiente hace aparecer como el método más rentable al mantenimiento continuo sobre los equipos.

Desde la óptica de gestión de la calidad el mantenimiento aporta otras ventajas a la producción [Denton K., 2004], influyendo sobre:

1. Los costos de producción.
2. La calidad del producto o servicio.
3. La capacidad operacional (cumplimiento de plazos de entrega).
4. La capacidad de respuesta (aporta soluciones innovadoras y aprovecha eficazmente opciones de cambio).
5. La seguridad e higiene industrial.
6. La imagen y seguridad ambiental.

El desarrollo de nuevas tecnologías, y su aplicación a los procesos industriales, la influencia de nuevas ramas de la técnica adaptadas a la industria como la electrónica, la informática, la robótica, entre otras, han permitido el desarrollo de diferentes enfoques del mantenimiento que persiguen el mismo objetivo, pero con particularidades que se deben a las características del proceso a que se aplica y orientadas en lo principal a la reducción de los costos. Estos enfoques han sido clasificados por diferentes autores [Rodríguez, 2007; Sánchez, 1999], los que después de un estudio actualizado, permiten agruparlos, siguiendo el patrón de sus características y similitudes, en:

1. Mantenimiento correctivo o a la rotura.
2. Mantenimiento Predictivo o basado en la condición o por diagnóstico y pronóstico técnico.
3. Mantenimientos Sistemáticos o Planificados.
4. Mantenimiento preventivo o basado en el tiempo.
5. Mantenimiento detectivo o búsqueda de fallas.
6. Mantenimiento Mejora o Reingeniería.
7. Sistemas de Gestión de Mantenimiento:
  - Sistema alterno de Mantenimiento
  - Mantenimiento Productivo Total.
  - Mantenimiento Basado en la Confiabilidad.

## 1. EL MANTENIMIENTO PREDICTIVO.

Por su frecuencia de uso y utilidad en industrias de producción continua, destaca entre todos, este tipo de mantenimiento que muestra como característica, su realización en base a un profundo conocimiento del estado real del equipo, buscando predecir la falla antes de que esta se produzca. Para conseguir esto se utilizan herramientas y técnicas de monitoreo, lo que supone la medición de diversos parámetros físicos que muestren una relación predecible con el ciclo de vida del componente.

Tiene como objetivo evitar reparaciones innecesarias, reduciendo las paradas por labores de mantenimiento y aumentando así el tiempo de vida útil del componente, se aplica en máquinas o instalaciones donde las paradas imprevistas ocasionen grandes costos.

Al comparar con otros tipos de mantenimiento, el predictivo muestra como característica negativa, requerir la disponibilidad de equipamiento que garantice el monitoreo constante de los indicadores, lo que exige de una costosa inversión inicial y durante la etapa de uso condiciona el empleo de personal de alta calificación para el control e interpretación de los datos y toma de decisiones en base a ellos. No obstante, aunque estos costos para realizar la inspección de los indicadores aumentan el precio del mantenimiento, la reducción que se logra en la frecuencia de estos, junto a la elevación en la seguridad del funcionamiento y en la vida útil del equipo, disminuyen en valor absoluto las pérdidas del proceso.

### 1.1. Importancia de la previsión en el mantenimiento predictivo.

Una vez colectados los datos y en la etapa de toma de decisiones, juega un papel fundamental la previsión del comportamiento futuro de los indicadores. Aun cuando estos pueden estar regidos por alguna ley funcional, en la mayoría de los casos tal previsión se hace empíricamente, suponiendo que el comportamiento pasado del indicador condiciona su realización en el futuro, o sea, la situación que dio lugar al comportamiento observado seguirá actuando de manera constante. Este postulado niega la dinámica de los procesos reales que se encuentran en constante transformación, sin embargo, *a corto plazo* se puede asumir que los cambios que experimenta el entorno carecen de importancia (esta suposición está de acuerdo con la experiencia práctica), y puede predecirse el futuro, asumiendo *estabilidad* a partir de comportamientos pasados, con un criterio de confiabilidad aceptable.

El equipamiento empleado en el mantenimiento predictivo, para monitorear procesos garantiza con relativa facilidad el almacenamiento de datos de comportamientos en etapas temporales, y la obtención a partir de estos de modelos matemáticos en forma de ecuaciones, aporta una utilidad adicional al favorecer la extrapolación de comportamientos al futuro para predecir el momento del fallo o de la intervención correctiva. Es este el momento en que aparecen como una herramienta de gran utilidad las técnicas de predicción, empleando el fundamento teórico de las series cronológicas, o sistemas computarizados de predicción como las redes neuronales entre otras.

## 2. SERIES CRONOLÓGICAS.

La secuencia ordenada de variables aleatorias  $y(t)$  y su distribución de probabilidad asociada, se denomina *proceso estocástico*. Un proceso estocástico es por tanto el modelo matemático para una serie temporal. De lo anterior se deduce que una *serie cronológica o temporal* es una sucesión de valores referidos a una misma variable y correspondiente a distintos instantes de tiempo [Box and Jenkins, 1976; Pollock 2006.].

Existen diferentes clasificaciones para el estudio de las series cronológicas, un concepto importante que define las operaciones posteriores para su interpretación lo constituye el de la estacionariedad.

Si examinamos, por ejemplo, la temperatura para una hora determinada del día a lo largo de los años en una determinada zona, aunque haya fluctuaciones, no habrá una tendencia a la variación de

su valor medio. De una manera informal, diremos que una serie es *estacionaria* cuando se encuentra en equilibrio estadístico, en el sentido de que sus propiedades no varían a lo largo del tiempo, y por lo tanto no pueden existir tendencias. En caso contrario el proceso es *no-estacionario* y sus propiedades varían con el tiempo.

## 2.1. Técnicas de previsión empleadas en series temporales.

Las técnicas de previsión se apoyan en la información histórica para, mediante su análisis, identificar pautas de comportamiento que supondremos siguen siendo válidas en futuro. Se presupone en todos los casos la hipótesis de estabilidad del entorno, que como se dijo con anterioridad es válida solo a corto plazo, por lo que estas técnicas son útiles especialmente en las previsiones para cortos períodos de tiempo. Muchos métodos se han desarrollado con este fin, pero en general, algunos de los más importantes por su sencillez y exactitud pueden agruparse en:

- Métodos de proyección de tendencias.
  - Identificación de tendencias (ajustes por regresión).
  - Métodos de suavizado (medias móviles y exponencial)
- Métodos de descomposición de series temporales.
  - Descomposición clásica de series cronológicas.

### 2.1.1. Métodos de proyección de tendencias.

Se conocen clásicamente como métodos de predicción de basamento estadístico, y unen a su sencillez formal, la necesidad de probar el cumplimiento de la hipótesis de estabilidad del entorno, que se manifiesta, si los errores se distribuyen según una ley de distribución normal con valor esperado cero y varianza constante  $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ , lo que condiciona su uso cuidadoso para la previsión, esto las hace útiles en:

- ❖ Predicciones a corto plazo.
- ❖ Series temporales no estacionarias de comportamiento muy regular.
- ❖ Entornos en los que no se prevea la posibilidad de cambios importantes, en un horizonte menor al de predicción.

#### 2.1.1.1. Identificación de tendencias (ajustes por regresión).

##### Tendencia lineal.

El método de ajuste de modelos lineales, tiene validades también para predecir comportamientos en el que la variable independiente toma valores relacionados a un instante de tiempo  $x_t$  y la dependiente es la respuesta del indicador  $y_t$ .

Para el modelo lineal:

$$y_t = b_0 + b_1 * x_t + e_t \quad (1)$$

aquí:

- $y_t$  es el valor que presenta el indicador estudiado en el instante de tiempo  $t$ .
- $b_0$  es el intercepto de la recta en el origen del tiempo.
- $b_1$  la pendiente o incremento que sufre el valor del indicador al variar el tiempo.
- $x_t$  es el valor de la variable independiente en el tiempo  $t$ .
- $e_t$  es error de predicción asociado al instante  $t$ .

Cuando se cuenta con un grupo de valores pasados, la mejor recta de ajuste será aquella para la cual el valor medio de los errores ( $e_t$ ) al cuadrado (para evitar la cancelación de valores simétricos a ambos lados del valor medio) se hace mínimo, técnica que le da nombre al criterio de *método de los mínimos cuadrados*.

Si definimos el error de predicción como:

$$e_t = \hat{y}_t - y_t \quad (2)$$

Donde:

$y_t$  es el valor medido del indicador en el instante de tiempo  $t$ .

$\hat{y}_t$  el valor estimado por la recta de ajuste para el mismo instante de tiempo.

Entonces:

$$\sum e_t^2 = \sum (\hat{y}_t - y_t)^2 \quad (3)$$

Que puede escribirse sustituyendo (3) en (1):

$$\sum e_t^2 = \sum (y_t - b_0 - b_1 * x_t)^2 \quad (4)$$

y para minimizar la suma de estos errores se debe derivar parcialmente respecto a cada uno de los  $b_i$  coeficientes:

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial b_0} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \sum e_t^2}{\partial b_1} = 0 \quad (5)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5), se obtiene el sistema de ecuaciones de dos variables con dos incógnitas siguiente:

$$-2 \sum (y_t - b_0 - b_1 * x_t) = 0 \quad (6)$$

$$-2 \sum x_t (y_t - b_0 - b_1 * x_t) = 0$$

el que luego de transformaciones conduce al sistema de ecuaciones normales:

$$b_0 n + b_1 \sum x_t = \sum y_t \quad (7)$$

$$b_0 \sum x_t + b_1 \sum (x_t)^2 = \sum x_t * y_t$$

Donde  $n$  es el número de datos de que se dispone:

La solución del sistema de ecuaciones (7) conduce a la obtención del valor de los  $b_i$  coeficientes:

$$b_1 = \frac{\sum x_t * y_t - \frac{\sum x_t \sum y_t}{n}}{\sum (x_t)^2 - \frac{[\sum x_t]^2}{n}} \quad (8)$$

$$b_0 = \bar{y}_t - b_1 \bar{x}_t$$

$\bar{y}_t = \sum \frac{y_i}{n}$  promedio del valor medido del indicador en el instante de tiempo  $t$ .

$\bar{x}_t = \sum \frac{x_t}{n}$  valor promedio de la variable independiente en el tiempo  $t$ .

### Pruebas de significación.

Para valorar la bondad del ajuste de la recta encontrada se emplea el coeficiente de correlación estimado que se define como la razón entre la covarianza de la distribución y el producto de las varianzas de las variables  $x_t$  e  $y_t$ :

$$r = \frac{\text{cov}(x_t; y_t)}{\sqrt{\sigma_{x_t}^2 * \sigma_{y_t}^2}} = \frac{\sum (x_t - \bar{x}_t) * (y_t - \bar{y}_t)}{\sqrt{\frac{\sum (x_t - \bar{x}_t)^2}{n} * \frac{\sum (y_t - \bar{y}_t)^2}{n}}} \quad (9)$$

Este estadígrafo muestra algunas características de interés:

1. toma valores en el intervalo desde 1 hasta -1.

2. mientras más cerca este el valor de  $|r|$  a 1, mejor será el ajuste.
3. si  $r = 0$  las variables están no están correlacionadas.
4. si  $r = 0$  no indica independencia entre las variables.
5. si  $r < 0$  la relación entre las variables es decreciente y para  $r > 0$  ocurre lo contrario.

Hay que tener en cuenta que, el coeficiente de correlación es un estadígrafo de una variable aleatoria, por lo que es necesario comprobar que no haya tomado un valor distinto de cero sólo debido al azar, además de que su cantidad depende del número de puntos que se dispone para ajustar el modelo (note que con sólo dos datos el grado de ajuste a una recta es perfecto, sea cual sea el comportamiento real de la serie). La tabla 2.1 muestra los valores mínimos requeridos para considerar a  $r$  significativamente distinto de cero, para un 95% de confiabilidad.

**Tabla 2.1.** Valores mínimos de  $r$  en función del tamaño de la muestra para rechazar la nulidad del coeficiente de correlación con un 95% de certeza. [Holman y Gajda, 1994]

n	$\alpha=0.05$
3	0.997
4	0.950
5	0.878
6	0.811
7	0.755
8	0.707
9	0.666
10	0.632
15	0.514
20	0.444
30	0.361
40	0.312
50	0.279
60	0.254
70	0.235
80	0.220
90	0.207
100	0.196

### Verificación de la hipótesis de estabilidad del entorno.

Las hipótesis establecidas para hacer cierto el ajuste por regresión deben ser comprobadas antes de poder aplicar el modelo, teniendo en cuenta también que para valores de  $r$  inferiores a 0.7 el modelo obtenido, no debe ser empleado para realizar predicciones. [Draper and Smith, 1980], si se tiene en cuenta que la aceptación de valores inferiores al tercer percentil de la distribución de  $r$  aumentan la magnitud de los errores y con ello el riesgo de la predicción.

La nulidad de la media, se cumple siempre por el modo de obtención de la recta de predicción y la constancia de la varianza puede comprobarse mediante la prueba de Cochran, o analizando el comportamiento gráfico de los residuos frente al tiempo.

La normalidad de los residuos puede comprobarse, teniendo en cuenta que las series temporales constituyen procesos continuos, mediante la prueba de Kolmogorof-Smirnoff (KS), esta se basa en el teorema fundamental de la estadística (Glivenko-Cantelli), a partir del cual una función de distribución empírica se aproxima a la función teórica si  $n$  crece. [Jonson, 1997]

Si determinamos la diferencia  $Dn$ , entre la distribución empírica de los errores  $S_n(x)$  y la función de distribución normal  $F_c(n)$  con valor esperado cero y varianza constante  $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ , con un

nivel de significación dado, esta distribución conocida (Tabla 2.2), puede emplearse para realizar pruebas de bondad de ajuste.

$$Dn = \max |Sn(x) - Fc(n)| \quad (7)$$

**Tabla 2.2** Valores críticos para comparar poblaciones por la prueba Kolmogorof-Smirnov. ( $n \leq 40$ ). [Cué, 1987]

$n$	$Dn$ $\alpha=0.05$
3	3
4-5	4
6-8	5
9-12	6
13-16	7
17-21	8
22-27	9
28-30	10
35-40	11

La prueba de Cochran es útil para comparar la varianza de varias poblaciones de igual tamaño, para realizar la prueba con los errores es necesario dividir en varias muestras de igual tamaño la distribución de los residuos y para cada muestra se calcula la varianza  $S_j^2$ , el estadígrafo de prueba  $g$ , se evalúa entonces para decidir si se rechaza la hipótesis de homogeneidad de varianza si pertenece a la región crítica (Anexo I):

$$g = \frac{\max \{s_j^2\}}{\sum s_j^2} \quad (10)$$

$$g > g_\alpha \text{ donde } \alpha \text{ es el nivel de significación.} \quad (11)$$

Una vez cumplido este requisito el modelo está apto para su empleo, se dice entonces, si el nuevo valor numérico de  $x_t$  que se determina está dentro del rango de valores muestrales de dicha variable, que estamos efectuando un ejercicio de **interpolación**, solo cuando dicho valor está fuera del intervalo de la muestra, estamos haciendo en realidad una **predicción**. En tal caso, especialmente si  $x_{t+1}$  se aleja apreciablemente de los valores observados de  $x_t$ , se asume el mayor riesgo de toda acción de predicción: aquél que proviene de suponer que el modelo de relación entre variables continuará siendo el mismo para valores numéricos fuera del rango muestral. Esto solo es cierto si se cumplen los supuestos introducidos con anterioridad, por lo que deberá cuidarse de su comprobación reiterada y evitar predecir para valores lejanos al rango muestral.

La predicción a corto plazo, así como la interpolación, pueden llevarse a cabo, si queremos tratar de estimar anticipadamente el valor futuro más probable de la variable dependiente utilizando la expresión (12), análoga a la anterior:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 * x_{t+1} \quad (12)$$

### Modelos no lineales.

Con frecuencia el comportamiento de la serie en el tiempo es no lineal y se necesita ajustar otros modelos. En muchos casos esto se logra haciendo una transformación de la variable, de forma empírica, en otros se emplean técnicas que agrupan en una familia varias modificaciones como la transformación de Box-Cox que consiste en una mutación de la variable respuesta del tipo  $z_t^l = (y_t + \lambda_2)^{\lambda_1}$  donde después de aumentar el valor de la serie una cantidad  $\lambda_2$  se eleva al exponente  $\lambda_1$ , la tabla 2.3, muestra los valores mas frecuentes que toma  $\lambda_1$  (el valor de  $\lambda_2$  por comodidad se puede establecer como cero) en este procedimiento.

**Tabla 2.3** Valores del coeficiente  $\lambda_1$  y la transformación resultante según el método de Box-Cox.

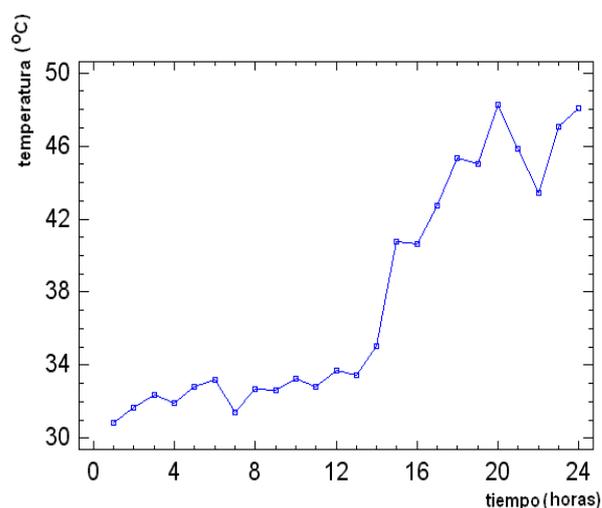
Potencia	Transformación	Descripción
$\lambda_1=2$	$z_t' = y_t^2$	cuadrado
$\lambda_1=1$	$z_t' = y_t$	sin transformar
$\lambda_1=0.5$	$z_t' = \sqrt{y_t}$	raíz cuadrada
$\lambda_1=0.333$	$z_t' = \sqrt[3]{y_t}$	raíz cúbica
$\lambda_1=0$	$z_t' = \ln y_t$	logaritmo de Y
$\lambda_1=-0.5$	$z_t' = \frac{1}{\sqrt{y_t}}$	raíz cuadrada inversa
$\lambda_1=-1$	$z_t' = \frac{1}{y_t}$	reciproco

La selección del valor óptimo de  $\lambda_1$  se hace de forma iterativa, según el criterio de máxima verosimilitud, con un nivel de confianza preestablecido (95% o mayor), aunque  $\lambda_1$  puede tomar valores diferentes a los indicados en la tabla si este es contenido en el intervalo de confianza entonces se sustituye por la cantidad tabulada para la transformación.

**Ejemplo 1.** La tabla 2.4 muestra los valores de temperatura del agua a la salida de un intercambiador de calor medidos cada una hora durante un día de trabajo y la gráfica que la acompaña revela que la serie generada no es estacionaria como promedio y presenta un comportamiento que permite emplear el método de proyección de tendencia.

**Tabla 2.4** Valores de temperatura del agua a la salida de un intercambiador de calor.

t (hora)	$z_t$ (T °C)	Residuos
1	30.816	2.595
2	31.663	2.617
3	32.352	2.480
4	31.931	1.234
5	32.785	1.263
6	33.208	0.861
7	31.433	-1.739
8	32.677	-1.320
9	32.635	-2.187
10	33.242	-2.406
11	32.839	-3.634
12	33.697	-3.601
13	33.468	-4.655
14	35.052	-3.897
15	40.754	0.980
16	40.666	0.067
17	42.731	1.307
18	45.365	3.115
19	44.994	1.919
20	48.277	4.377
21	45.876	1.151
22	43.454	-2.096
23	47.09	0.714
24	48.056	0.855



**Figura 2.1.** Gráfico de las variaciones de temperatura con el tiempo.

El cálculo de los coeficientes estimados, a partir de la expresión (8), arroja:

$$b_0 = 27.396 \quad \text{y} \quad b_1 = 0.825$$

Con un valor del coeficiente de correlación, obtenido a partir de la expresión (9) igual a:

$r = 0.9189$ , lo que indica por su signo una relación creciente positiva entre las variables, significativamente diferente de cero con un 95% de nivel de confianza, ya que para 20 datos es significativa por encima de 0.444, lo que conduce a un modelo de ajuste del tipo:  $Temp = 27.396 + 0.825 * tiempo$ .

Una prueba Kolmogorov-Smirnov aplicada a los residuos del anterior modelo, los cuales se

reportan en la Tabla 2.5 muestra una  $d_{\max} = 0.195$  lo que no permite rechazar, con un nivel de confianza superior al 95% (0.3192), la hipótesis de normalidad..

Para realizar la prueba de K.S., se calcula la frecuencia acumulada de cada valor de la distribución de los errores y se compara con los valores de la función de distribución normal con media cero y desviación estándar determinada a partir de la distribución de los errores ( $\sigma=2.05$ ),

**Tabla 2.5.** Prueba Kolmogorov-Smirnov para probar la normalidad de los residuos de ejemplo analizado.

residuos	Frecuencia acumulada	P( $X \leq x$ ), según N(0,2.05)	Dn
2.595	0.0280115	0.031	0.028
2.617	0.069054	0.060	0.009
2.480	0.110096	0.073	0.037
1.234	0.151139	0.075	0.076
1.263	0.192181	0.168	0.024
0.861	0.2332235	0.191	0.042
-1.739	0.274266	0.201	0.073
-1.320	0.3153085	0.244	0.072
-2.187	0.356351	0.299	-0.154
-2.406	0.3973935	0.511	-0.113
-3.634	0.438436	0.612	-0.195
-3.601	0.4794785	0.634	-0.155
-4.655	0.520521	0.635	-0.132
-3.897	0.5615635	0.652	-0.116
0.980	0.602606	0.677	-0.086
0.067	0.6436485	0.689	-0.049
1.307	0.684691	0.693	-0.015
3.115	0.7257335	0.699	-0.053
1.919	0.766776	0.778	-0.072
4.377	0.8078185	0.839	-0.042
1.151	0.848861	0.850	-0.001
-2.096	0.8899035	0.852	0.038
0.714	0.930946	0.893	-0.029
0.855	0.9719885	0.960	0.012

Para probar la homogeneidad de la varianza dividimos la población de los residuos en dos muestras del mismo tamaño (12 valores para cada una) y calculamos la varianza de ellas

$$S_1^2 = 5.807, S_2^2 = 7.073 \text{ y } \sum S_j^2 = 12.880$$

Con lo que formamos el cociente (ecuación 10):

$$g = \frac{\max\{s_j^2\}}{\sum s_j^2} = \frac{7.073}{12.880} = 0.549$$

y comparamos para  $k=2$ ,  $v_{10}$  y  $g_{0.01} = 0.8539$ . (Anexo I.)

y como  $g > g_{\alpha}$  no se puede rechazar con 99 % de significación que las varianzas de ambas muestras son iguales, o lo que es lo mismo que la varianza de los residuos se mantiene constante.

### 2.1.1.2. Métodos de suavizado.

Toda serie temporal tiene una componente aleatoria que no puede predecirse, pero que debe tenerse en cuenta como criterio de exactitud, esta característica conocida como ruido blanco

(white noise), es deseable aislarla en toda serie que se intente describir. Observe que si se logran predecir todos los componentes de la serie menos el ruido blanco entonces este también podrá considerarse en la predicción como término del error acotado entre límites conocidos y controlados.

El objetivo de los métodos de suavizado es eliminar de la serie esta variación aleatoria y permitir mostrar con más claridad el comportamiento de fondo de la serie. Entre los métodos más usados de suavizado se encuentra el suavizado por medias móviles y el suavizado exponencial.

**Suavizado por medias móviles.**

Si un intervalo muestral  $[x_0, x_n]$  es dividido en subintervalos y promediado el valor de estos, entonces se obtendrá por sustitución una serie transformada  $z_t$  que no contendrá las variaciones aleatorias de la serie original. Se denomina esta nueva serie como de medias móviles de orden  $n$  [MA(n)]. Una serie bilateral de medias móviles de longitud  $(2k+1)$  se obtendría de la ecuación.

$$z_t = \frac{y_{t-k} + y_{t-k+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+k}}{2k+1} \tag{13}$$

Observe que cada valor de la serie es sustituido por el valor promediado desde  $t-k$  hasta  $t+k$ . Esta serie se denomina bilateral pues toma igual número de valores antes o después del instante de tiempo considerado, y al ser construida en base a un número impar de términos garantiza que sea centrada, pero en el caso de ser par, la serie resultante quedaría descentrada al tomar ahora más valores antes o después del instante genérico de tiempo, en ese caso deberá construirse de nuevo una media móvil de orden dos sobre la media suavizada de orden par para volver a centrar los valores de la serie.

**Ejemplo 2.** En la tabla 2.6 aparecen registrados 25 valores de presión medidos a la salida de un compresor, se quiere ajustar un modelo de medias móviles de orden 3 [MA(3)], con los 24 primeros valores y predecir el valor 25 de la presión, para medir la exactitud del modelo.

Solución.

La ecuación de medias móviles se convierte entonces en:

$$z_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3} \tag{14}$$

**Tabla 2.6.** Valores medidos y estimados de presión a la salida del compresor.

Tiempo (horas)	Presión (MPa)	Media móvil 3	Suavizado exponencial $\alpha=0.19$
1	87	-	87
2	87.8	91.0	87
3	98.3	92.8	87.152
4	92.4	93.8	89.27012
5	90.8	92.5	89.8647972
6	94.4	90.2	90.0424857
7	85.4	87.4	90.8704134
8	82.5	88.5	89.8310349
9	97.5	93.8	88.4381383
10	101.3	99.8	90.159892
11	100.6	99.6	92.2765125
12	96.8	96.6	93.8579751
13	92.3	94.6	94.4169599
14	94.8	96.0	94.0147375
15	100.8	96.6	94.1639374
16	94.2	96.5	95.4247893

17	94.4	91.1	95.1920793
18	84.8	90.2	95.0415842
19	91.5	87.4	93.0956832
20	86	92.4	92.7925034
21	99.6	97.5	91.5019278
22	107	103.5	93.0405615
23	103.9	103.4	95.6928548
24	99.2	103.5	97.2522124
25	95.4	103.4	97.622292

En esta técnica se comienzan a obtener valores a partir del dato  $k+1$  y puede extenderse hasta  $L-(k+1)$  para la serie impar o  $L-k$  si la serie es par, siendo  $L$  la longitud de la serie, por lo que se pierden los valores iniciales y finales. Para poder predecir con medias móviles, se necesita descentrar el grupo de valores con los que se calcula el promedio hasta el extremo de situar la media calculada fuera de ese intervalo. El procedimiento empleado consiste en dar como predicción a un periodo vista el promedio de los  $k$  últimos datos obtenidos:

$$z_t = \frac{y_{t-k} + y_{t-k+1} + \dots + y_{t-1}}{k} \quad (15)$$

Donde:

$z_t$  es el valor predicho para el tiempo  $t$

$y_t$  es el valor medido en el tiempo  $t$

$k$  es orden de la media móvil.

En este ejemplo:

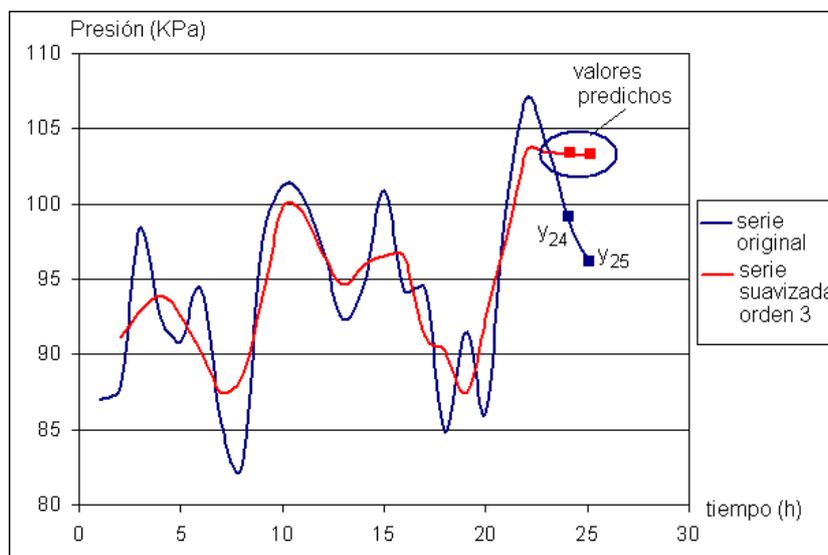
$$z_{25} = \frac{y_{22} + y_{23} + y_{24}}{3}, \text{ habiendo determinado } y_{24} \text{ con la misma formulación}$$

$$z_{24} = \frac{y_{21} + y_{22} + y_{23}}{3}.$$

Los resultados se muestran en la tercera columna de tabla 2.6. Los valores obtenidos con este método conducen a predicciones retrasadas si la serie tiene tendencia, por lo que el método presenta un valor de uso limitado y las predicciones deberán ser a periodos cortos y con comprobación constante. El error de estimación para cualquier instante de tiempo puede determinarse como:

$$e_t = |z_t - y_t| \quad (16)$$

$$\text{Para } t=25, e_{25} = |103.4 - 95.4| = 8 \text{ MPa}$$



**Figura 2.2.** Suavizado y predicción con medias móviles de orden 3.

### Suavizado exponencial.

En el suavizado exponencial se tiene en cuenta la variación introducida por el error que se comete al suavizar la serie y ofrece como regla general mejores resultados que las medias móviles, sobre todo en series con tendencia, aunque presenta como desventajas el desconocimiento previo de los valores óptimos del coeficiente de ponderación ( $\alpha$ ), lo que exige que sea un proceso iterativo en el que se emplea como criterio de mejor descriptor aquel para el cual es mínima la desviación absoluta media, es decir, la media en valor absoluto del error y que es insensible a las variaciones en series con oscilaciones cíclicas, donde arroja resultados erróneos.

Se expresa matemáticamente como:

$$z_t = z_{t-1} + \alpha(y_{t-1} - z_{t-1}) \quad (17)$$

Donde:

$z_t$  es el valor de la serie suavizada en el periodo actual.

$z_{t-1}$  es el valor de la serie suavizada en el periodo t-1.

$y_{t-1}$  es el valor de la serie original en el periodo anterior.

$(y_{t-1} - z_{t-1})$  es el error de suavizado cometido en el instante de tiempo pasado.

$\alpha$  es la constante de suavizado o coeficiente de ponderación,  $0 \leq \alpha \leq 1$

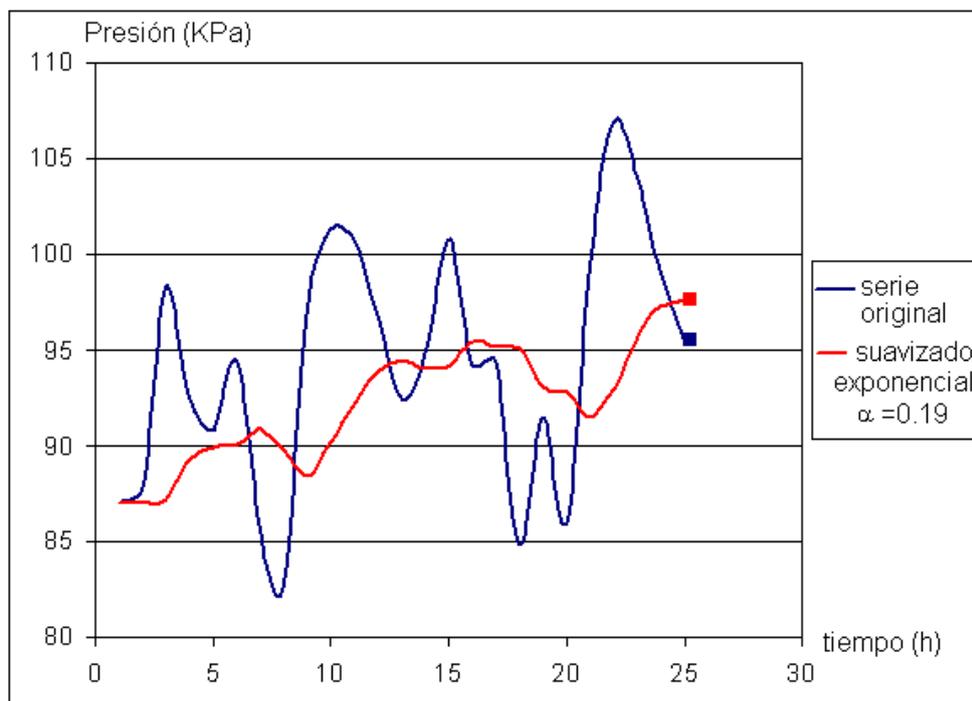
Para inicializar la serie, en la ecuación (17) se sustituye por  $z_t = y_t$ . Por ejemplo en el problema anterior, si suavizamos exponencialmente con  $\alpha=0.19$  la serie de las presiones, para:  $t=1$  el valor de la presión  $z_1 = y_1 = 87$ , para

$$t=2, z_2 = z_1 + \alpha(y_1 - z_1) = 87 + 0.19(87 - 87) = 87$$

$$t=3, z_3 = z_2 + \alpha(y_2 - z_2) = 87 + 0.19(87.8 - 87) = 87.152$$

Los resultados aparecen en la última columna de la tabla 2.6, donde se aprecia un mejor ajuste a la serie original con un error de predicción con el valor de la presión en  $t=25$  inferior al de medias móviles de orden 3 (Figura 2.3).

Sustituyendo en la ecuación (16), para  $t=25$ ,  $e_{25} = |97.6 - 95.4| = 2.2 \text{ MPa}$



**Figura 2.3.** Suavizado exponencial con  $\alpha=0.19$  y predicción del valor para  $t=25$ .

### 2.1.3. Métodos clásicos de descomposición de series temporales.

Si como se dijo anteriormente las series temporales están formadas por un componente

predecible y una componente aleatoria, o ruido blanco (*white noise*), el estudio continuado de procesos estocásticos ha demostrado que estas componentes predecibles, se descomponen a su vez en tendencia ( $T_t$ ), estacionalidad ( $S_t$ ) y ciclo ( $C_t$ ). La forma en que aparecen en los diferentes modelos de la práctica puede ser muy compleja, pero por lo general pueden llegar a reducirse con bastante aproximación a modelos más sencillos. Si se desprecia el efecto de la componente cíclica ( $C_t$ ), que se pone de manifiesto solo en series muy grandes, estos se resumen en:

Modelos aditivos:

$$y_t = T_t + S_t + e_t \quad (18)$$

Modelos multiplicativos:

$$y_t = T_t * S_t * e_t \quad (19)$$

Modelos mixtos, en los que pueden aparecer componentes multiplicadas o sumadas indistintamente:

$$y_t = T_t * S_t + e_t \text{ o } y_t = T_t + S_t * e_t \quad (20)$$

Para la determinación de cada uno de los términos se realiza un procedimiento de descomposición que se estudia desde diferentes puntos de vista, el método clásico, se apoya en la descomposición por separado de cada elemento y su validación en el modelo real antes de realizar la predicción.

En el modelo multiplicativo, la tendencia se determina por cualquiera de los métodos estudiados con anterioridad. Para determinar la componente estacional, se debe encontrar las medias móviles de longitud un ciclo estacional ( $L$ ) y con los valores obtenidos promediando la media móvil, se calcula el cociente entre el valor medido y la media móvil correspondiente:

$$S_t = \frac{y_t}{MA(n)} \quad (21)$$

Luego se determina el promedio de estos índices para cada periodo estacional de la serie (por ejemplo, en una serie mensual, el promedio de los enero, el de los febreros,...) y se corrige este valor de forma tal que la suma total sea igual a  $L$ .

El ruido blanco no se determina numéricamente, sino que se controla que su valor se encuentre entre cotas establecidas con anterioridad para el nivel de confianza necesario.

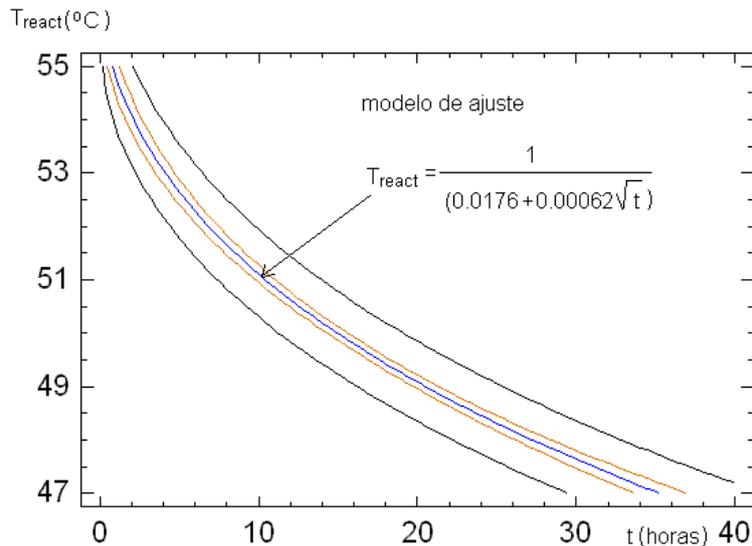
Una vez lograda esta descomposición, se puede predecir acoplando todos los elementos en el modelo original, multiplicando el valor de la tendencia del modelo con el coeficiente estacional determinado para cada periodo.

Alternativamente, para el modelo aditivo se procede de forma similar, pero por esta vez sumando los componentes de la serie.

**Ejemplo 3.** La temperatura del agua en un reactor es medida durante tres días, cada dos horas. Empleando el método de descomposición de la serie, prediga los valores de la serie y determine la magnitud del error de predicción.

El modelo para determinar el valor de la tendencia (Figura 2.4) es encontrado por regresión, como:

$$T_{react} = \frac{1}{(0.0176 + 0.00062\sqrt{t})} \quad (22)$$



**Figura 2.4.** Modelo de ajuste por regresión de la serie observada.

Con un coeficiente de correlación  $r = 0.9852$ , válido para ser utilizado en hallar la componente tendencial de la serie sustituyendo en los valores de  $t$  (columna 4, Tabla 2.7)

Para determinar el coeficiente estacional, se ajusta un modelo de medias móviles de orden 6 empleando la ecuación 13 con 6 términos:

$$z_t = \frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + y_{t+3}}{6} \quad (23)$$

Este valor, calculado de los promedios, se muestra en la columna número 5, a partir de los que se determina el coeficiente estacional  $S_t$  (columna 6, Tabla 2.7), al formar el cociente entre el valor de la serie y MA(6).

Estos coeficientes son ajustados para que su suma de igual a la longitud del periodo estacional, (en este caso 6), promediando los valores de iguales periodos, para mejor comprensión ese paso se representa en la tabla 2.8, en la que  $S_{1l}$ ,  $S_{12}$  y  $S_{13}$  se corresponden con valores de los coeficientes estacionales para iguales periodos, luego estos se promedian ( $S_{\text{tprom}}$ ), y se ajustan ( $S_{\text{taj}}$ ) para que su suma de igual a 6.

Luego de haber descompuesto la serie, se pueden predecir sus valores acoplando sus componentes, empleando la ecuación 19, sin el término del error pues este no es conocido, multiplicando el valor de la tendencia por el coeficiente estacional ajustado correspondiente al periodo de que se trate, por ejemplo para la hora 1, se utiliza:

$$z_1 = T_1 * S_1 = 54.78 * 1.003 = 55.049$$

Los valores de la serie predicha se muestran en la columna, 7 de la tabla 2.7 y el error relativo que se comete empleando la ecuación (24), se muestra en la última columna. Note el buen ajuste que se logra y el pequeño valor de los errores de predicción:

$$e_t = \left| \frac{y_t - z_t}{y_t} \right| * 100 = \left| \frac{54.78 - 54.068}{54.78} \right| * 100 = 1.3 \% \quad (24)$$

**Tabla 2.7.** Serie de temperaturas medidas en el reactor, y sus componentes determinados.

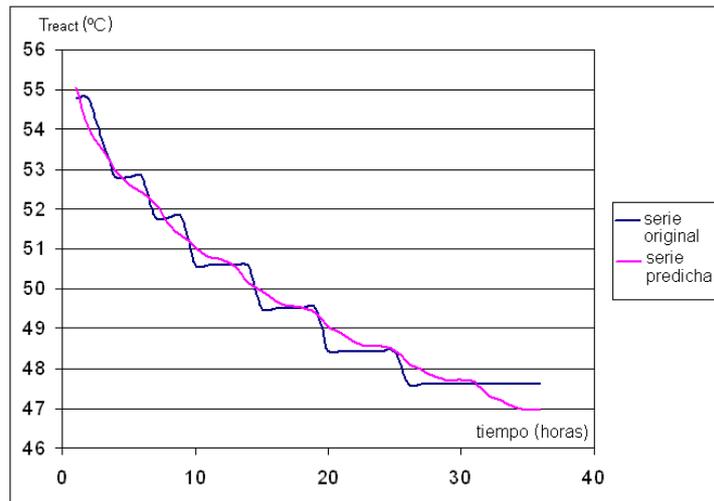
días	t(horas)	$T_{\text{react}}(y_t)$	$T_t$	MA(6)	$S_t=y_t/\text{MA}(6)$	Predicción	error
día 1	1	54.78	54.88	-	-	55.049	0.269
	2	54.78	54.12	-	-	54.068	0.712
	3	53.72	53.55	53.78	0.999	53.497	0.223
	4	52.81	53.08	53.39	0.989	52.972	0.162
	5	52.81	52.67	52.79	1.000	52.617	0.193
	6	52.81	52.30	52.40	1.008	52.409	0.401
	7	51.78	51.97	52.19	0.992	52.130	0.350
	8	51.78	51.67	51.75	1.001	51.618	0.162
	9	51.78	51.39	51.30	1.009	51.336	0.444

	10	50.59	51.12	51.07	0.991	51.021	0.431
	11	50.59	50.87	50.83	0.995	50.823	0.233
	12	50.59	50.64	50.59	1.000	50.740	0.150
día 2	1	50.59	50.41	50.37	1.004	50.566	0.024
	2	50.59	50.20	50.15	1.009	50.151	0.439
	3	49.5	50.00	49.94	0.991	49.947	0.447
	4	49.5	49.80	49.72	0.996	49.701	0.201
	5	49.5	49.61	49.50	1.000	49.563	0.063
	6	49.5	49.43	49.29	1.004	49.529	0.029
	7	49.5	49.25	49.08	1.009	49.403	0.097
	8	48.44	49.09	48.86	0.991	49.036	0.596
	9	48.44	48.92	48.65	0.996	48.872	0.432
	10	48.44	48.76	48.44	1.000	48.664	0.224
	11	48.44	48.61	48.44	1.000	48.558	0.118
	12	48.44	48.46	48.27	1.004	48.553	0.113
día 3	1	48.44	48.31	48.10	1.007	48.454	0.014
	2	47.59	48.17	47.93	0.993	48.118	0.528
	3	47.59	48.03	47.76	0.996	47.979	0.389
	4	47.59	47.89	47.59	1.000	47.795	0.205
	5	47.59	47.76	47.59	1.000	47.710	0.120
	6	47.59	47.63	47.59	1.000	47.724	0.134
	7	47.59	47.50	47.59	1.000	47.644	0.054
	8	47.59	47.38	47.59	1.000	47.330	0.260
	9	47.59	47.26	47.59	1.000	47.208	0.382
	10	47.59	47.14	47.59	1.000	47.042	0.548
	11	47.59	47.02	-	-	46.972	0.618
	12	47.59	46.90	-	-	46.998	0.592

**Tabla 2.7.** Determinación y ajuste de los coeficientes estacionales de la serie de temperaturas.

hora	$S_{t1}$	$S_{t2}$	$S_{t3}$	$S_{t4}$	$S_{t_{prom}}$	$S_{t_{aj}}$
1	0.992	1.004	1.009	1.007	1.003	1.003
2	1.001	1.009	0.991	0.993	0.998	0.999
3	1.009	0.991	0.996	0.996	0.998	0.999
4	0.991	0.996	1.000	1.000	0.997	0.998
5	0.995	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
6	1.000	1.004	1.004	1.000	1.002	1.002
Suma					5.997	6.000

A esta misma conclusión puede llegarse observando el comportamiento gráfico de las series real y predicha (Figura 2.6).



**Figura 2.5.** Serie original y valores de la serie predicha.

La sencillez y exactitud del método de descomposición, lo hace recurrente y útil en muchos casos de series con tendencia que describen un comportamiento estable en el tiempo.

### CONCLUSIONES:

Otros métodos de análisis y predicción de series cronológicas han sido planteados, de uso generalizado o en aplicaciones específicas, y aun métodos modernos de alcance general como los modelos ARIMA, propuestos por Box y Jenkins, se emplean en la práctica para el interpretar fenómenos que se comportan estocasticamente, pero el alcance y la sencillez de los métodos aquí presentados, los hace insustituibles en la comprensión de este tema.

En sus inicios las series temporales, aparecían como aplicaciones privativas al análisis financiero y mucha fue su utilidad en este campo, pero el desarrollo de las distintas ramas de la ciencia, y la tendencia a desaparecer que muestran los límites entre especialidades, han hecho útiles tales técnicas en perfiles de la ciencia y la técnica en la que la predicción de comportamientos es condición obligatoria como es el caso del mantenimiento predictivo.

### BIBLIOGRAFIA:

1. Box, G. E. P. and Jenkins, G. M.: Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden Day Inc, California, 1976.
2. Carrión García, A. Análisis de series temporales. Técnicas de previsión. Dpto. de Estadística. Universidad Valencia, España. 1997.
3. Cué J. L. y otros; Estadística Parte II. Ed. EMPES, Ciudad de La Habana, 1987
4. Chatfield, C. The Analysis of Time Series: An Introduction. Ed. Chapman and Hall. London. 2003
5. Dennis, R. and Sanford Weisberg. Residuals and Influence in Regression. University of Minnesota. Ed. Chapman and Hall. New York. 1986. ISBN 0-412-24280-X
6. Denton Keith, D. Seguridad Industrial. Mc Graw-Hill. México, 2004.
7. Draper N. R. and Smith H. Applied Regression Analysis. Library of Congress. United States. 1980. ISBN 0-471-02995-5.
8. González, J. P., Rodríguez, E. G., Navarro, D. M. y Martín, R. G. Análisis de regresión y series cronológicas. Editorial Félix Valera. Ciudad de La Habana. 2004
9. Holman, J. P. and Gajda, W. J.: Métodos Experimentales para Ingenieros. Naucalpan de Juarez, McGraw-Hill/InterAmericana de México S.A, 1994.
10. Johnson, D. E.; Métodos multivariados aplicados al análisis de datos, Kansas State University, Brooks Cole Publishing Co., USA, 1997. ISBN-0-534-23796-7
11. Miller, I.R., J.E. Freund y R. Jonson. Probabilidad y Estadística para Ingenieros. 4ta Ed.: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México. 1992
12. Monchy, F.; Teoría y práctica del mantenimiento industrial, Ed. Masson, Paris, 1990
13. Neil W. Polhemus. Statgraphics Centurion XV. Stat Point, Inc. USA, 2005.

14. Pollock, D. S. Lectures in time-series analysis and forecasting. London University. 2006
15. Rodríguez Nogueira, T. El Mantenimiento predictivo con un enfoque de producción mas limpia en agregados del generador de vapor de centrales termoeléctricas. Tesis Doctoral. Universidad de Matanzas. Cuba. 2005
16. Rodríguez, A., R. Francis y L. Guyon. Estadística Matemática II. Facultad de Ingeniería Industrial ISPJAE, Ciudad de La Habana. 1986.
17. Sánchez Ávila, J. L. Desarrollo y aplicación del diagnóstico y pronóstico técnico al mantenimiento de los sistemas centralizados de aire acondicionado. Tesis Doctoral. Universidad de Matanzas. Cuba. 1999

**ANEXO I.** Valores críticos de la prueba de Cochran para la homogeneidad de la varianza (grados de libertad  $v_x=n-1$ ,  $k$ =grupos de prueba). nivel de significación  $\alpha=0.01$ .

k	$v_x$													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	$\infty$
2	0.9999	0.9950	0.9794	0.9586	0.9373	0.9172	0.8988	0.8823	0.8674	0.8539	0.7949	0.7067	0.6062	0.5000
3	0.9993	0.9423	0.8831	0.8335	0.7933	0.7606	0.7335	0.7107	0.6912	0.6743	0.6059	0.5153	0.4230	0.3333
4	0.9676	0.8643	0.7814	0.7212	0.6761	0.6410	0.6129	0.5897	0.5702	0.5536	0.4884	0.4057	0.3251	0.2500
5	0.9279	0.7885	0.6957	0.6329	0.5875	0.5531	0.5259	0.5037	0.4854	0.4697	0.4094	0.3351	0.2644	0.2000
6	0.8828	0.7218	0.6258	0.5635	0.5195	0.4866	0.4608	0.4401	0.4229	0.4084	0.3529	0.2858	0.2229	0.1667
7	0.8376	0.6644	0.5685	0.5080	0.4659	0.4347	0.4105	0.3911	0.3751	0.3616	0.3105	0.2494	0.1929	0.1429
8	0.7945	0.6152	0.5209	0.4627	0.4226	0.3932	0.3704	0.3522	0.3373	0.3248	0.2779	0.2214	0.1700	0.1250
9	0.7544	0.5727	0.4810	0.4251	0.3870	0.3592	0.3378	0.3207	0.3067	0.2950	0.2514	0.1992	0.1521	0.1111
10	0.7175	0.5358	0.4469	0.3934	0.3572	0.3308	0.3106	0.2945	0.2813	0.2704	0.2297	0.1811	0.1376	0.1000
12	0.6528	0.4751	0.3919	0.3428	0.3099	0.2861	0.2680	0.2535	0.2419	0.2320	0.1961	0.1535	0.1157	0.0833
15	0.5747	0.4069	0.3317	0.2882	0.2593	0.2386	0.2228	0.2104	0.2002	0.1918	0.1612	0.1251	0.0934	0.0667
20	0.4799	0.3297	0.2654	0.2288	0.2048	0.1877	0.1748	0.1646	0.1567	0.1501	0.1248	0.0960	0.0709	0.0500
24	0.4727	0.2871	0.2295	0.1970	0.1759	0.1608	0.1495	0.1406	0.1338	0.1283	0.1060	0.0810	0.0595	0.0417
30	0.3632	0.2412	0.1913	0.1635	0.1454	0.1327	0.1232	0.1157	0.1100	0.1054	0.0867	0.0658	0.0480	0.0333
40	0.2940	0.1915	0.1508	0.1281	0.1135	0.1033	0.0957	0.0898	0.0853	0.0816	0.0668	0.0503	0.0363	0.0250
60	0.2151	0.1371	0.1069	0.0902	0.0796	0.0722	0.0668	0.0625	0.0594	0.0567	0.0461	0.0344	0.0245	0.0167
120	0.1225	0.0759	0.0585	0.0489	0.0429	0.0387	0.0357	0.0334	0.0316	0.0302	0.0242	0.0178	0.0125	0.0083
$\infty$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0