**TÍTULO:** Aplicación de la integral doble.

**AUTOR:** Dr. Reinaldo Hernández Camacho.

## INTRODUCCIÓN

Para reconocer cuándo se puede aplicar un concepto matemático en la resolución de un problema es esencial interpretar un conjunto de propiedades que represente una caracterización general de ese concepto y desarrollar habilidades en el reconocimiento de la presencia o no de esa caracterización en un problema matemático.

Un concepto matemático se caracteriza por dos componentes fundamentales: su contenido y su extensión. El contenido expresa las propiedades esenciales que tienen en común todos los elementos que pertenecen al concepto y la extensión es el conjunto de todos esos elementos. Dos conceptos son equivalentes si tienen la misma extensión, aunque el contenido puede variar de una definición a otra. Los conjuntos de propiedades que se utilicen para definir un mismo concepto pueden ser diferentes en dos definiciones que se den de ese concepto, pero tienen que ser equivalentes, tienen que generar la misma extensión.

Ahora bien, para cada operación matemática existe un conjunto de propiedades esenciales que tienen en común todos los problemas que pueden resolverse mediante esa operación. Ese conjunto de propiedades esenciales representan el contenido del concepto asociado a la operación, y el conjunto de todos esos problemas conforman la extensión del concepto.

Interpretar el contenido de un concepto y desarrollar habilidades en el reconocimiento de ese contenido en los problemas matemáticos, resulta muchas veces decisivo para lograr resolver un problema.

## DESARROLLO:

Cuando se estudia la integral doble, al igual que ocurre con otros conceptos matemáticos, se da a conocer a los estudiantes un conjunto de problemas que se resuelven mediante la aplicación de este tipo de integrales, como por ejemplo: el cálculo del área de una región plana, la masa de una lámina delgada a partir de la función que representa la densidad superficial de masa, los momentos de masas y de áreas, etc. Así, los estudiantes pueden llegar a resolver uno cualquiera de estos problemas si se les presentan en la práctica, pero es muy poco probable que sean capaces de reconocer que pueden aplicar la integral doble en algún otro problema, que resulte totalmente nuevo para ellos y que no pertenezca, exactamente, al conjunto de problemas que se les dio a conocer como ejemplos de aplicación.

Lo cierto es que, aunque no resulta una práctica habitual en las clases de matemática, sería muy provechoso, que cuando se introduzca un nuevo concepto matemático, se intente al menos, que los estudiantes conozcan e interpreten un conjunto de propiedades que representen el contenido de ese nuevo concepto, para que puedan analizar si en un problema dado están presentes o no ese conjunto de propiedades y puedan decidir si es posible resolver el problema aplicando el nuevo concepto.

A continuación se presenta una definición alternativa del concepto de integral doble a partir de un conjunto de propiedades que conforman el contenido de ese concepto. Si un estudiante desarrolla habilidades en el análisis del cumplimiento de estas propiedades en un problema, estará en posibilidad de identificar cuándo un problema puede resolverse o no mediante una integral de este tipo.

## DEFINICIÓN ALTERNATIVA DE LA INTEGRAL DOBLE.

Sea $f(x,y)$ una función real definida y continua en todo punto de una región cerrada y acotada R $\subset \Re^2$.

La integral doble de la función $f(x,y)$ en la región R $\subset \Re^2$, se denota $\iint_R f(x,y)dxdy$ y se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:

1) Cuando $f(x,y)$ es constante e igual a C en $R_m \subset R$ y $\Delta R_m$ es el área de $R_m$, entonces

$$\iint_{R_m} f(x,y)dxdy = C.\Delta R_m$$

2) Cuando $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R_m \subset R$, entonces

$$\iint_{R_m} f(x,y)dxdy \leq \iint_{R_m} g(x,y)dxdy$$ , siendo g continua en $R_m$

3) Para toda partición P = $\{R_1, R_{21}, ..., R_p\}$ de $R_m \subset R$ se cumple que:

$$\iint_{R_m} f(x,y)dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)dxdy + ... + \iint_{R_p} f(x,y)dxdy$$

**OBSERVACIÓN:**

A partir de la definición anterior es posible establecer un conjunto de propiedades que caracterizan a todos los tipos de problemas que pueden ser modelados mediante una integral doble. Esto facilita, a los estudiantes, la identificación de dichos problemas.

## CARACTERIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS QUE PUEDEN RESOLVERSE MEDIANTE UNA INTEGRAL DOBLE.

Si la solución S de un problema está relacionada con una función real $f(x,y)$ definida en una región cerrada y acotada R del plano XY, entonces esa solución S es equivalente a $\iint_R f(x,y)dxdy$ si se cumple que:

a) $f(x,y)$ es una función definida y continua en todo punto de la región cerrada y acotada R.

b) En ese tipo de problemas, si $f(x,y)$ fuera constante en R; es decir, si $f(x,y) = C$ para todo $(x,y) \in$ R, y $\Delta$R es el área de R, entonces $S_f$(R) = C.$\Delta$R

Esta propiedad se puede analizar también de la siguiente manera:

Si $f(x,y) = C$ para todo $(x,y) \in$ R y R es un rectángulo de largo m y ancho n, entonces

$S_f$(R) = C.m.n

c) La solución S de un problema de ese tipo, en la región cerrada y acotada R, no se altera si se realiza cualquier partición de la región R y se toma como solución la suma de las soluciones del problema en cada una de las subregiones en que se ha dividido R.

d) En ese tipo de problemas, cuanto mayor sea la imagen de la función $f(x, y)$ asociada, mayor será la solución S del problema.

**OBSERVACIONES:**

- En este trabajo, la expresión **tipo de problemas**, se utiliza con el significado siguiente: Conjunto de problemas, cuyas soluciones están asociadas cada una de ellas a una función real en una región R del plano XY, y todos los problemas tienen exactamente las mismas características, con la única excepción de la función asociada, que puede ser diferente de un problema a otro.
- Esta definición alternativa es más apropiada, que la definición tradicional, para reconocer cuándo puede aplicarse la integral doble en la solución de un problema, pero no lo es para el desarrollo de habilidades en el cálculo de integrales dobles.
- Es recomendable introducir esta definición cuando se vayan a resolver problemas aplicando la integral doble, después que los estudiantes hayan desarrollado habilidades en el cálculo de esta operación.
- Se recomienda que se presenten a los estudiantes tanto problemas que puedan ser modelados mediante una integral doble, como otros que no puedan serlo porque incumplan alguna de las propiedades necesarias y suficientes.
- La equivalencia entre la definición alternativa que se ha dado aquí y la definición tradicional de integral doble, está contenida en el siguiente teorema:

**TEOREMA.**

Sea S una función, tal que, para cada función $f(x, y)$ definida y continua en todo punto de una región cerrada y acotada $R \subset \Re^2$, y para cada región $R_m \subset R$, S asocia un número real que denotaremos por $S_f(R_m)$

Entonces:

$S_f(R_m) = \iint_{R_m} f(x, y)dxdy$ , para toda función $f(x, y)$ definida y continua en todo punto de R y para toda región $R_m \subset R$ sí y sólo sí S cumple las siguientes propiedades:

1) Si $f(x, y)$ es constante e igual a C en $R_m \subset R$ y $\Delta R_m$ es el área de $R_m$ , entonces

$S_f(R_m) = C.\Delta R_m$

2) Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R_m \subset R$, entonces

$S_f(R_m) \leq S_g(R_m)$, siendo $g(x, y)$) continua en $R_m$

3) Para toda partición $P = \{R_1, R_{21}, ..., R_p\}$ de $R_m \subset R$ se cumple que:

$S_f(R_m) = S_f(R_1) + S_f(R_2) + ... + S_f(R_p)$

**DEMOSTRACIÓN:**

Es necesario demostrar que:

a) Si S cumple las propiedades 1,2 y 3 entonces

$S_f$ ($R_m$) = $\iint_{R_m} f(x,y)dxdy$ , para toda función $f(x,y)$ definida y continua en todo

punto de una región cerrada y acotada R $\subset \Re^2$, y para toda región $R_m \subset$ R.

b) Si $S_f$ ($R_m$) = $\iint_{R_m} f(x,y)dxdy$ , para toda función $f(x,y)$ definida y continua en todo punto de una región cerrada y acotada R $\subset \Re^2$, y para toda región $R_m \subset$ R entonces S cumple las propiedades 1,2 y 3.

**Demostremos a)**

Sea P = $\{R_1, R_{21}, ..., R_p\}$ una partición de $R_m \subset$ R con norma de partición δ(p).

Sean $m_i$ y $M_i$ el mínimo y el máximo respectivamente de la función $f(x,y)$ en la subregión $R_i \subset R_m$ , (i=1,2, ..., p) y $\Delta R_i$ el área de la subregión $R_i$.

Sean $h(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones reales definidas en el dominio R, tales que $h(x,y) = m_i$ y $g(x,y) = M_i$ si $(x,y) \in R_i$, (i=1,2,..., p)

Como $h(x,y)$ y $g(x,y)$ son constantes en cada $R_i$ , entonces

$S_h$ ($R_i$) = $m_i \Delta R_i$ y $S_g$ ($R_i$) = $M_i \Delta R_i$ si $(x,y) \in R_i$

Como $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R_i$

$S_h(R_i) \leq S_f(R_i) \leq S_g(R_i)$

Luego $\sum_{i=1}^{p} m_i \Delta R_i \leq \sum_{i=1}^{p} S_f(R_i) \leq \sum_{i=1}^{p} M_i \Delta R_i$

$\sum_{i=1}^{p} m_i \Delta R_i \leq S_f(R_m) \leq \sum_{i=1}^{p} M_i \Delta R_i$

Pero $\sum_{i=1}^{p} m_i \Delta R_i$ y $\sum_{i=1}^{p} M_i \Delta R_i$ son sumas integrales de la función $f(x,y)$ en la región $R_m$, porque al ser $m_i$ y $M_i$ el mínimo y el máximo respectivamente de $f(x,y)$ en $R_i$, representan ambos imágenes de $f(x,y)$ en puntos de $R_i$.

Al tender a cero la norma de la partición, la forma en que sean elegidos los puntos en cada región $R_i$ es irrelevante.

Luego, $\lim_{\delta(p)\to 0} \sum_{i=1}^{p} m_i \Delta R_i = \lim_{\delta(p)\to 0} \sum_{i=1}^{p} M_i \Delta R_i = \iint_{R_m} f(x,y)dxdy$

Entonces, como $\iint_{R_m} f(x,y)dxdy \leq S_f(R_m) \leq \iint_{R_m} f(x,y)dxdy$

Se tiene que $S_f$ ($R_m$) = $\iint_{R_m} f(x,y)dxdy$

En particular

**$S_f$ (R) =** $\iint_{R_m} f(x,y)dxdy$

**Demostremos b)**

Es suficiente demostrar que $\iint_{R_m} f(x,y)dxdy$ , para toda función $f(x,y)$ definida y continua en todo punto de un dominio cerrado R, y para toda región $R_m \subset R$ cumple las propiedades 1, 2 y 3.
Esto es:

1) Si $f(x,y)$ =c (constante) en $R_m \subset R$, entonces $\iint_{R_m} f(x,y)dxdy$ = c.$\Delta R_m$, siendo $\Delta R_m$ el área de la región $R_m$.

2) Si $f(x,y) \le g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R_m \subset R$ y $g(x,y)$ es continua en $R_m$ entonces $\iint_{R_m} f(x,y)dxdy \le \iint_{R_m} g(x,y)dxdy$ (Por propiedad de la integral doble.)

3) Si P=$\{R_1, R_{21},..., R_p\}$ es una partición de la región $R_m \subset R$ , entonces:

$S_f(R_m) = S_f(R_1) + S_f(R_2) + ... + S_f(R_p)$

$$\iint_{R_m} f(x,y)dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)dxdy + ... + \iint_{R_p} f(x,y)dxdy$$

(Por propiedad de la integral doble).
Queda pues demostrado el teorema.

## EJEMPLOS RELACIONADO CON LA APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DOBLE.

### EJEMPLO 1

Un terreno de forma rectangular de 80 metros de ancho y 120 metros de largo se encuentra sembrado de arroz, ya próximo a cosechar. El terreno tiene partes más bajas y húmedas que otras, donde el rendimiento del arroz es mayor. La cantidad de quintales de arroz por $m^2$ que se estima deben producirse, puede expresarse mediante la función $f(x,y) = \dfrac{x+y+100}{40000}$ , donde x e y tienen el significado siguiente:
Haciendo corresponder uno de los vértices del rectángulo con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas XY, uno de los lados que representan el ancho del rectángulo con el eje X y uno de los lados que representan el largo con el eje Y. Entonces la x representa la componente de un punto $(x,y)$ del rectángulo en la dirección del ancho, y la y la componente de un punto $(x,y)$ del rectángulo en la dirección del largo, ambas magnitudes medidas en metros, $0 \le x \le 80$, $0 \le y \le 120$. ¿Cuántos quintales de arroz se producirán en el terreno?

### ANÁLISIS.

a) La función $f(x,y)$ es continua en el dominio cerrado que representa el rectángulo.
b) Si $f(x,y)$ fuera constante (si fuera constante la cantidad de quintales que se produjeran por $m^2$), la solución del problema (la cantidad de quintales de arroz que se producirían en el terreno), podría obtenerse multiplicando esa constante por el área del terreno en $m^2$.

c) Si se realiza cualquier partición del rectángulo donde está definida la función y se calcula la producción de arroz en cada una de las subregiones que se originen mediante la partición, la suma de esas producciones será siempre igual a la producción total en todo el rectángulo.
d) Cuanto mayor sea la imagen de la función asociada (la cantidad de quintales por $m^2$), mayor será la solución del problema (la cantidad total de quintales de arroz que se producen en el terreno).

Por lo tanto, en este problema se cumplen todas las propiedades necesarias y suficientes para que su solución pueda obtenerse mediante una integral doble.

$$S = \int_0^{120} dy \int_0^{80} \frac{x+y+100}{40000} dx = \int_0^{120} dy \int_0^{80} \left(\frac{x}{4000} + \frac{y}{40000} + \frac{1}{400}\right) dx$$

$$S = \int_0^{120} \left[ \frac{x^2}{80000} + \frac{xy}{40000} + \frac{x}{400} \right]_0^{80} dy$$

$$S = \int_0^{120} \left(\frac{14}{50} + \frac{y}{500}\right) dy = 61{,}6$$

Respuesta: En el terreno se deben producir 61,6 quintales de arroz.

**EJEMPLO 2**

Un pelotón de soldados está en formación. El pelotón está compuesto por 3 columnas y cada columna tiene 7 soldados que están ordenados según su estatura. La estatura en cm de los soldados está dada por la función $f(x, y) = 170 + x + y$, donde la x representa el número de orden de la columna y la y el número de orden del soldado en su columna. ¿Cuál es la suma de las estaturas de los 21 soldados del pelotón?

**ANÁLISIS:**

Si se considera para la función f el dominio cerrado

R = $\{(x, y) \in \Re^2 : 1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 7\}$

Se observa que la función f no es continua en ese dominio, porque sólo está definida en el conjunto de pares ordenados asilados $(x, y)$, donde x=1,2,3, y=1,2,…,7, y no está definida para los otros puntos $(x, y)$ que también pertenecen a R.

Por lo tanto la solución de este problema no se obtiene mediante una integral doble.

Su solución es equivalente a S = $\sum_{y=1}^{7}\sum_{x=1}^{3}(170 + x + y)$

**EJEMPLO 3**

Una piscina se ha construido en un terreno de forma rectangular de 6 metros de ancho y 12 metros de largo. La profundidad de la piscina se va incrementando según va aumentando la distancia a uno de sus lados más cortos. La profundidad en metros puede expresarse mediante la función $f(x, y) = 0{,}6 + 0{,}1y$, donde la x representa la distancia del punto (x,y), situado sobre la superficie superior de la piscina, a uno de los lados que determinan el largo de la piscina (componente del punto en la dirección del ancho) y la y la distancia de dicho punto a uno de los lados que representan el ancho (componente del punto en la dirección del largo). ¿Cuántos $m^3$ de agua se necesitan para llenar completamente la piscina?

**ANÁLISIS.**

a) La función $f(x,y)$ es continua en el dominio cerrado que representa el rectángulo.
b) Si $f(x,y)$ fuera constante (si fuera constante la profundidad de la piscina), la solución del problema (la cantidad de $m^3$ de agua que se necesitan para llenar completamente la piscina), podría obtenerse multiplicando esa constante por el área del terreno en metros cuadrados.
c) Si se realiza cualquier partición del rectángulo donde está definida la función y se calcula el volumen del agua en $m^3$ de cada una de las subregiones que se produzcan mediante la partición, la suma de esos volúmenes será siempre igual al volumen total en todo el rectángulo.
d) Cuanto mayor sea la imagen de la función asociada (la profundidad en metros de la piscina), mayor será la solución del problema (la cantidad de $m^3$ de agua que se necesitan para llenar completamente la piscina).

Por lo tanto, en este problema se cumplen todas las propiedades necesarias y suficientes para que su solución pueda obtenerse mediante una integral doble.

S= $\int_0^{12} dy \int_0^6 (0{,}6 + 0{,}1y)dy$ $\int_0^6 (0{,}6 + 0{,}1y)dx$ = 3,6+0,6y

S= $\int_0^{12} (3{,}6 + 0{,}6y)dy$ = 86,4

Respuesta: La cantidad de agua necesaria para llenar la piscina es de 86,4 $m^3$

**BIBLIOGRAFIA:**


Ausubel, David Paul. (1997). **Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo**. México: Editorial Trillas.

Ballester, Sergio. (1999). **La sistematización de los conocimientos matemáticos.** Proposiciones Metodológicas. La Habana. Cuba. Editorial Academia.

Campistrous, Luis y Rizo, Celia. (1996). **Aprende a resolver problemas matemáticos**. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Delgado, José Raúl. (1999). **La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del conocimiento y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas.** Tesis de doctorado en Ciencias Pedagógicas. Universidad de la Habana. Ciudad de la Habana. Cuba.

Hernández, Reinaldo. (2000). **Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto**. Tesis de doctorado en

Ciencias Pedagógicas. Universidad de la Habana. Ciudad de la Habana. Cuba.

Hernández, Reinaldo. (2007). **Propuesta didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema.** Revista INIE, Actualidades Investigativas en Educación**.** Revista Electrónica publicada por el Instituto de Investigación en Educación. Universidad de Costa Rica. Volumen 7, Número 2. Mayo-Agosto 2007. pp. 1-19. ISSN 1409-4703

Hernández, Reinaldo. (2007). **La derivada como una extensión necesaria de la división.** Revista Atenas. ISSN-1682-2749.

Hernández, Reinaldo. (2007). **Técnicas para la resolución de problemas**. Monografías/2007. CD- ROM. ISBN: 959- 16-0490-4.

Hernández, Reinaldo. (2007). **La Heurística en el razonamiento universal**. Revista Atenas. ISSN-1682-2749.

Hernández, Reinaldo. (2007). **Estrategias didácticas ¿Cómo enseñar a aprender?**
Multimedia-2007. CEDE en colaboración con el CREA. 257-2007.

Hernández, Reinaldo. (2007). **Cuándo se puede aplicar la Integral definida para resolver un problema**. Congreso Internacional de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas. ALAMMI 2007. México.

Llivina, Miguel. (1999). **Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos**. Tesis de doctorado en Ciencias. Universidad de la Habana. Ciudad de la Habana. Cuba.

Polya, George. (1986). **Cómo plantear y resolver problemas.** México: Editorial Trillas.

Santos, Luís Miguel. (1994). **La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas**. México: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.

Torres, Paúl. (1999). **Didácticas cubanas en la enseñanza de la Matemática.** La Habana. Cuba: PROMET.