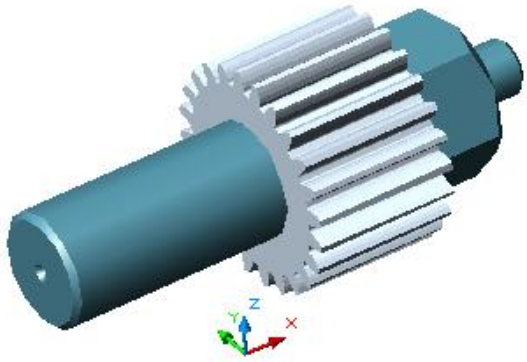
MODELACIÓN DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS.

Una solución computarizada.



Orestes González Quintero y Eleno Alfonso Brindis.

Facultad de Ingenierías Química y Mecánica

Universidad de Matanzas, 2006

Introducción

En el desarrollo de la Informática en Cuba, la utilización de la computación en la enseñanza, en las investigaciones científicas, en la gestión docente y en la empresarial, ha constituido un objetivo priorizado de la Política Nacional Informática desde los primeros años de la Revolución. La actualidad, caracterizada cada vez más por los avances de la ciencia y la técnica y la acelerada automatización de los procesos productivos, tecnológicos e informáticos por medio de la Computación, propicia y obliga a dar cumplimiento a esa prioridad.

Por otra parte, las transmisiones por engranajes es el grupo de transmisiones mecánicas más difundido e importante desde los inicios de la Revolución Industrial hasta nuestros días. Este mecanismo de tres miembros, en el cual dos elementos engranados son móviles y forman con el elemento fijo pares de rotación o traslación, es empleado en los más diversos campos y condiciones de trabajo.

En este trabajo se brinda una breve panorámica acerca de la geometría de ruedas dentadas normales y de las talladas con desplazamiento de la cremallera, corregidas, se brindan las ecuaciones para el cálculo de ambos tipos de engranajes, haciendo énfasis en los casos típicos de cálculo que pueden presentarse. El objetivo de este estudio es proponer una solución computarizada para ambos casos de cálculo es decir para el cálculo geométrico de las ruedas dentadas con distancia interaxial prefijada y con distancia interaxial libre. En adición se ofrece una variante de modelado de ruedas dentadas en AutoCAD

Ruedas dentadas cilíndricas normales.

Para facilitar la producción y disminuir el número de herramientas cortantes, los parámetros principales de las ruedas dentadas fueron normalizados. El método de elaboración de ruedas dentadas mas usado es aquel en el cual las dimensiones de los dientes de las mismas se encuentran según las correlaciones que a continuación se exponen. Tales ruedas se denominan normales o nulas.

El módulo del engranaje, que es la relación entre el paso t y el número π ($\mathbf{m = t / \pi}$) es la magnitud que ha sido tomada como la principal en la rueda dentada y a través de ella y del número de dientes, se expresan las restantes dimensiones de una rueda dentada normal.

$$\frac{d_1}{z_1} = \frac{d_2}{z_2} = \frac{t}{\pi}$$

donde: **d** *es el diámetro de la circunferencia primitiva del engrane.*
z *es el número de dientes.*
m *es el módulo del engranaje.*

(En las fórmulas se utilizan los subíndices 1 y 2 para el piñón y la rueda respectivamente).

Actualmente en varias de las normas relativas a engranajes, editadas por diferentes países, existe coincidencia en los valores de módulo recomendados en la primera serie de preferencia. Con mas frecuencia son empleados los módulos recomendados en la norma internacional ISO 54-77 : **1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 16; 20; 25 mm**

A continuación se muestran los parámetros principales para el cálculo geométrico de las ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos.

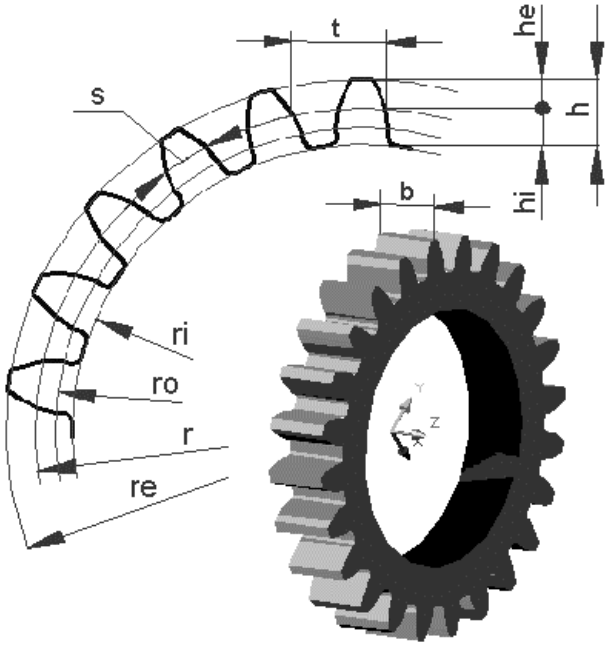


Figura 1. Parámetros geométricos de las ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos.

Altura de la cabeza del diente	$h_e = m$
Altura del pie del diente	$h_i = 1{,}25\ m$
Altura del diente	$h = 2{,}25\ m$
Espesor del diente medido sobre la circunferencia primitiva	$S = 0{,}5\ (\pi \cdot m)$
Anchura del hueco medida sobre la circunferencia primitiva	$S_B = 0{,}5\ (\pi \cdot m)$
Paso de engranaje	$t = \pi \cdot m$
Radio de la circunferencia primitiva	$r = 0{,}5\ (z \cdot m)$
Radio de la circunferencia de cabeza	$r_e = 0{,}5\ (z + 2)\ m$
Radio de la circunferencia de pie	$r_i = 0{,}5\ (z - 2{,}5)\ m$
Radio de la circunferencia básica	$r_o = r \cos \alpha$

Métodos de elaboración.

Existen diversos métodos de elaboración de las ruedas dentadas; pero esencialmente todos se basan en uno de los principios siguientes:

a) Método de forma o de copia.

b) Método de generación o rodamiento.

El método de copia consiste en ir copiando el perfil de la herramienta en la pieza bruta con el empleo de una fresadora y una fresa de engranajes o de módulo)

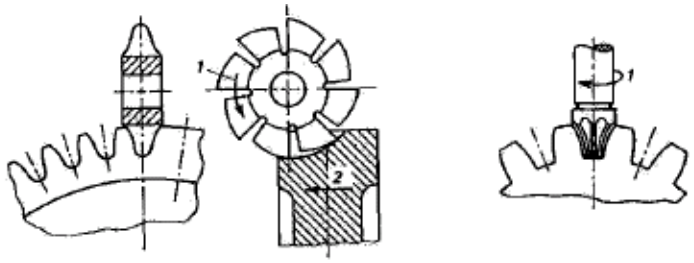
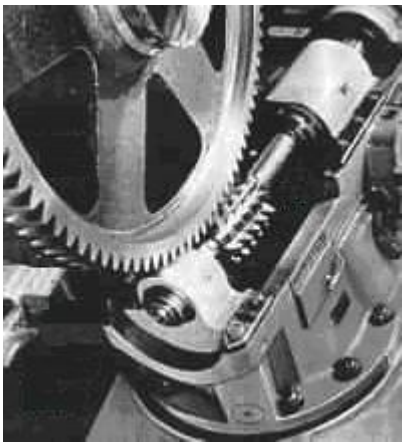


Figura 2. Tallado de engranajes con fresas modulares.

Este método tiene como deficiencia su poca productividad y su inexactitud (generalmente con una fresa se tallan ruedas con diferentes números de dientes). Por otra parte usando esta forma de elaboración de las ruedas dentadas no se pueden fabricar dientes corregidos, ya que la corrección implica una modificación de la forma del perfil del diente; y habría que tener entonces una herramienta con el perfil modificado.

El método de generación o rodamiento permite la "generación del perfil del diente", existiendo diversas formas de lograrlo: por mortajado, por tallado con cremallera, por tallado con fresa madre, etc. Este método es mucho más productivo y exacto que el método anterior, y además permite el uso de correcciones, ya que el perfil evolvente se genera en dependencia de las dimensiones del semiproducto.



Durante el método de copia, el borde cortante o la matriz que forma el diente es una copia exacta de la rueda a fabricar o de cierta parte de ella. En cambio durante el procedimiento de generación el borde cortante de la herramienta es capaz de crear mediante una rodadura controlada los perfiles de los dientes.

El tallado de ruedas dentadas con corrección de los flancos de dientes se logra mediante el conveniente desplazamiento de la herramienta generadora con relación a la posición de referencia que se establece entre la rueda tallada y la recta de módulo en la herramienta empleada.

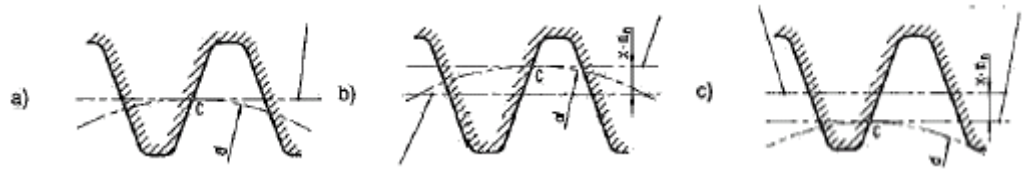


Figura 3. a) Rueda tallada sin corrección, b) Rueda tallada con corrección negativa, c) Rueda tallada con corrección positiva.

Básicamente la corrección de los dientes, empleando un desplazamiento radial de la herramienta en el engrane para el tallado, permite el mejoramiento de la resistencia del dentado mediante el trazado del perfil activo de los dientes por diferentes partes de la curva de evolvente de la misma circunferencia básica. La fabricación de ruedas con dentado corregido no es más compleja y costosa que las ruedas no corregidas. Se fabrican en la misma máquina herramienta que las empleadas para ruedas dentadas sin corrección, la diferencia en su elaboración consiste en que los semiproductos exigidos se hacen con diferentes diámetros.

En sentido general se distinguen dos tipos de correcciones, la corrección de altura y la corrección angular:

1. La corrección de altura:

En ocasiones la distancia entre centros a utilizar no puede ser elegida libremente. Por ejemplo puede darse el caso de que en una pareja de engranajes ya diseñada y construida, durante la explotación, los dientes del piñón resulten más débiles que los de la rueda. Ante esta situación el diseñador puede decidir para mejorar el comportamiento de la transmisión dar una corrección positiva al piñón y una negativa de la misma medida a la rueda; de tal manera que el engranaje en su conjunto quede compensado.

En este caso se mantiene la distancia entre centros, pudiendo utilizarse la misma carcaza. Cuando se corrige una pareja de engranajes y la misma corrección positiva ξ_1 que se le da al piñón, se le da negativa a la rueda ξ_2; estamos en presencia de una corrección de altura o corrección compensada de las ruedas dentadas. Es decir:

$$\xi_1 = - \xi_2.$$

$$\xi_\Sigma = \xi_1 + (- \xi_2)= 0.$$

ξ_Σ es el coeficiente sumario de corrección (suma de los coeficientes de corrección del piñón y de la rueda)

También se cumple que: $\alpha_{mo} = \alpha_c$, siendo α_{mo} el ángulo de montaje y α_c el ángulo de la cremallera.

2. La corrección angular:

En ocasiones para atenuar determinada falla del dentado, o para llevar una pareja de engranajes a una distancia entre centros mayor o menor de la que tendrían si fueran normales se utilizan las correcciones angulares. Estamos en presencia de una corrección angular cuando el coeficiente de corrección sumario es diferente de cero, es decir el valor de corrección positiva que se le da a una rueda no coincide con el valor de corrección negativa que se le da a la otra.

$$\xi_\Sigma = \xi_1 + \xi_2 \neq 0$$

Ordinariamente se emplea $\xi_\Sigma > 0$, entonces la distancia axial aumenta, el $\boldsymbol{\alpha_{mo} > \alpha_c}$, las circunferencias primitiva y de paso no coinciden.

Los parámetros principales para evaluar la corrección del dentado son los coeficientes de corrección, que cuantifican el desplazamiento absoluto de la herramienta Δabs relativo al módulo:

$$\xi_1 = \frac{\Delta_{abs1}}{m_c} \quad \text{y} \quad \xi_2 = \frac{\Delta_{abs2}}{m_c}$$

Se sabe que la dimensión del engranaje es proporcional a su distancia axial, por lo que se pueden distinguir dos casos típicos de cálculo:

1. Son dados a_w, u_{12} y m_c.(distancia interaxial prefijada)
2. Son dados u_{12} y m_c. (distancia interaxial libre)

Donde:

a_w es la distancia entre ejes

u_{12} es la relación de transmisión

m_c es el módulo

A continuación se exponen las fórmulas utilizadas para el cálculo geométrico de las ruedas dentadas con distancia interaxial prefijada y con distancia interaxial libre, conociendo sus parámetros fundamentales. En dichas fórmulas son empleados los subíndices 1 y 2 para el piñón y la rueda respectivamente.

Secuencia para el cálculo geométrico de las ruedas dentadas con distancia interaxial prefijada:

Son dados a_w, u_{12} y m_c.

1- $Z_1 = 2\, a_w / (u_{12} + 1)\, m_c$

2- $Z_2 = Z_1\, u_{12}$

3- $\cos \alpha\, mo = mc\, (z_1 + z_2) \cos \alpha c / (2\, aw)$

4- se determina el ángulo de montaje, αmo, por la tabla de involuta.

5- $\xi_{sum} = \xi_1 + \xi_2 = (\text{inv}\, \alpha_{mo} - \text{inv}\, \alpha c\, (z_1 + z_2)) / 2\tan \alpha_c$

6- La determinación de los coeficientes de corrección del piñón y la rueda se hará según se muestra en la Figura 4.

7- $r\, i_1 = m_c\, (0.5Z_1 + \xi_1 - 1{,}25mc)$

8- $r\, i_2 = m_c\, (0.5Z_2 + \xi_2 - 1{,}25mc)$

9- $r\, e_1 = a_w - r\, i_2 - 0{,}25mc$

10- $r\, e_2 = a_w - r\, i_1 - 0{,}25mc$

11- $r_{p\,1} = m_c\, z_1/2$

12- $r_{p\,2} = m_c\, z_2/2$

13- $r_{o\,1} = r_{p1} \cos \alpha_c$ $\qquad \alpha_e = \text{arcos}\, (r_o / r_e)$

14- $r_{o\,2} = r_{p2} \cos \alpha_c$

15- $S_{p1} = m_c\, ((\pi/2) + (2\xi_1 \tan \alpha c))$

16- $S_{p2} = m_c\, ((\pi/2) + (2\xi_2 \tan \alpha c))$

17- $Se_1 >= 0{,}3\, m_c$

18- $Se_2 >= 0{,}3\, m_c$

$$Se = 2\, re\, [(Sp / 2\, rp) + \text{inv}\, \alpha\, c - \text{inv}\, \alpha\, e]$$

19- $$\varepsilon = \frac{\sqrt{re_2^{\,2} - ro_2^{\,2}} + \sqrt{re_1^{\,2} - ro_1^{\,2}} - a_w sen(\alpha_{mo})}{\pi . m_c . \cos \alpha_c}$$

Si $\varepsilon < 1$ entonces se debe cambiar m_c y z_1 y repetir los cálculos.

De esta forma usando ruedas corregidas se puede garantizar la distancia axial y la relación de transmisión dada.

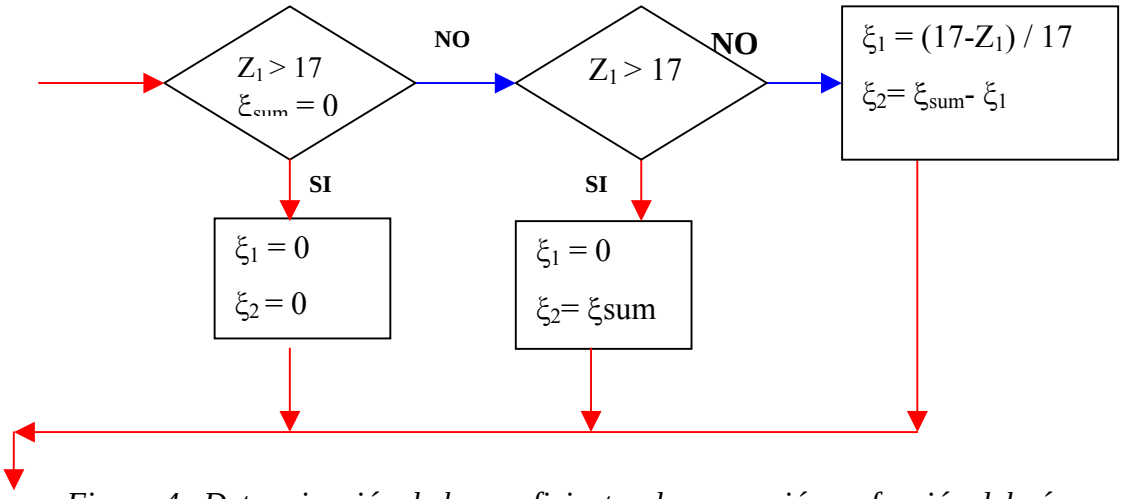


Figura 4. Determinación de los coeficientes de corrección en función del número de dientes del piñón, Z_1 y del coeficiente sumario de corrección, ξ_{sum}.

Como puede apreciarse el cálculo de estas transmisiones es engorroso y consume una gran cantidad de tiempo cuando se realiza manualmente (sobre todo si no se cumple alguna de las condiciones de los pasos 17, 18 o 19), de manera que no favorece la comparación de los resultados de varias variantes de solución del problema con vistas a seleccionar la mejor de forma expedita.

Secuencia para el cálculo geométrico de las ruedas dentadas con distancia interaxial libre:

Durante la proyección de transmisiones con distancia interaxial libre, con el objeto de disminuir las dimensiones de la transmisión, es ventajoso tomar el menor número de dientes posibles para el piñón, pero no menos de 8 o 9, es evidente que el piñón deba ser corregido positivamente. Con ayuda de las correcciones positivas en la rueda se puede prevenir la interferencia de los dientes engranados y posibilitar el tallado de piñones con número de dientes pequeños (menores que 17) sin peligro del socavado de sus bases.

En este caso son dados u_{12} y m_c.

(Se asume z_1)

1- $\xi_1 = (z_{min} - z_1) / z_{min}$

2- $z_2 = z_1 u_{12}$

3- $\xi_2 = 0$, es decir, el piñón tendrá corrección pero la rueda puede ser normal.

4- inv αmo = inv αc + 2 tan αc $[(\xi_{1+} \xi_2) / (z_1 + z_2)]$

5- El ángulo α_{mo} se determina por la tabla de involutas.

.

6- $a_w = (mc\ (z_1 + z_2) \cos \alpha c) / 2 \cos \alpha mo$

7- $r\ i_1 = mc\ (0.5.z_1 + \xi_1 - 1{,}25mc)$

8- $r\ i_2 = mc\ (0.5.z_2 + \xi_2 - 1{,}25mc)$

9- $r\ e_1 = a_w - r\ i_2 - 0{,}25mc$

10- $r\ e_2 = a_w - r\ i_1 - 0{,}25mc$

11- $r_{p\,1} = m_c\ z_1/2$

12- $r_{p\,2} = m_c\ z_2/2$

13- $r_{o\,1} = r_{p1} \cos \alpha_c$

14- $r_{o\,2} = r_{p2} \cos \alpha_c$

15- $s_{p1} = m_c\ ((\pi/2) + (2\xi_1 \tan \alpha_c))$

16- $s_{p2} = m_c\ (\pi/2)$

17- $\alpha_e 1 = \text{arcos}\ (r_o/r_e)$

18- $\alpha_e 2 = \text{arcos}\ (r_o/r_e)$

$$\left.\begin{array}{l} 19\text{- } Se_1 >= 0{,}3\ mc \\ 20\text{- } Se_2 >= 0{,}3\ mc \end{array}\right\} \quad Se = 2\ re\ \ [(Sp / 2\ rp) + \text{inv}\ \alpha\ c - \text{inv}\ \alpha\ e]$$

21- $$\varepsilon = \frac{\sqrt{re_2^{\,2} - ro_2^{\,2}} + \sqrt{re_1^{\,2} - ro_1^{\,2}} - a_w sen(\alpha_{mo})}{\pi . m_c . \cos \alpha_c}$$

Si $\varepsilon < 1$ entonces se debe cambiar m_c y z_1 y repetir los cálculos.

Como puede apreciarse el cálculo de estas transmisiones resulta igualmente engorroso y consume una gran cantidad de tiempo cuando se realiza manualmente (sobre todo si no se cumple alguna de las condiciones de los pasos 19, 20 o 21), de manera que no propicia tampoco la comparación de los resultados de varias variantes de solución del problema con vistas a seleccionar la mejor de forma expedita.

Las técnicas analíticas incorporadas en el cálculo geométrico de los engranajes, asocian las teorías de geometría, trigonometría y el análisis gráfico de estos mecanismos. Con este criterio se alcanzarán soluciones precisas.

Cuando son deseadas soluciones analíticas más exactas para varias posiciones de un mecanismo, el número de cálculos se vuelve poco manejable. En estas situaciones, el uso de soluciones computarizadas es lo apropiado. Las soluciones computarizadas son también valiosas cuando varias iteraciones de diseño deben ser analizadas.

Entre las soluciones computarizadas para el análisis de mecanismos que utilizaremos en la asignatura se encuentran las hojas de cálculo (de Excel). Una característica importante de las mismas es que cuando el contenido de una celda de entrada de datos es cambiado, son actualizados todos los otros resultados. Esto permite diseñar iteraciones que serán completadas con facilidad.

El uso de Microsoft Excel para realizar los cálculos.

El Excel es un programa que permite hacer hojas de cálculo, gráficos, cálculos estadísticos y entre ellos hacer vínculos con otras hojas u otros programas.

Los programas de hoja de cálculo se utilizan ampliamente para ejecutar cálculos matemáticos. Los programas en hojas de cálculo permiten que el usuario incluya cuadros de información divididos en filas y columnas. El usuario puede definir fórmulas en las celdas para ejecutar cálculos utilizando la información de otras celdas. Los resultados de las fórmulas se calculan automáticamente a medida que se agregan las cantidades. Cuando se efectúan cambios a la información contenida en las celdas, el programa recalcula las fórmulas y muestra automáticamente los nuevos resultados.

Los usos de las hojas de cálculos pueden ir desde simples cálculos aritméticos, como sumar columnas de números, hasta sofisticados análisis de información.

Los programas de hoja de cálculo también pueden tomar información "bruta" y mostrarla gráficamente. Esto es útil para determinar tendencias y para realizar presentaciones con gráficas. Muchos de los programas modernos de hoja de cálculo incorporan buena parte de las características de los programas de procesador de textos.

Los documentos de las hojas de cálculo también pueden ser guardados en múltiples versiones a las que luego se puede tener nuevo acceso según se requiera. Además son capaces de desplegar textos e imágenes en forma similar a la que se puede hacer utilizando un procesador de texto.

Por estas razones se puede decir que se ha escogido el programa Excel para elaborar los programas para el cálculo de ruedas dentadas de dientes rectos que se explican mas adelante. Además, forma parte del Plan de Estudio de la carrera Ingeniería Mecánica. Su potencial estriba en la realización de cálculos numéricos a gran escala, y el recálculo ante variaciones en los datos, así como, el empleo de modelos para la resolución de problemas.

Las ventajas de su uso se ponen de manifiesto cuando resolvemos problemas que exigen un número importante de cálculos complejos y repetitivos. Por otra parte, permiten establecer relaciones entre los datos y estructurar los procesos, ya que se pueden dividir las tareas en módulos separados, es un instrumento transparente, ya que las fórmulas están al descubierto, realizan el recálculo automáticamente y facilitan el análisis de sensibilidad con gráficos.

Programa en Excel para el cálculo geométrico de transmisiones por engranajes con distancia interaxial prefijada

El software **"Cálculo geométrico de transmisiones por engranajes con distancia interaxial prefijada",** consta de las siguientes hojas, pasándose de una a otra haciendo clic en la etiqueta correspondiente, ver Figura 5:

- Manual de usuario.
- Datos.
- Cálculo Geométrico.
- Resumen.
- Para AutoCAD.

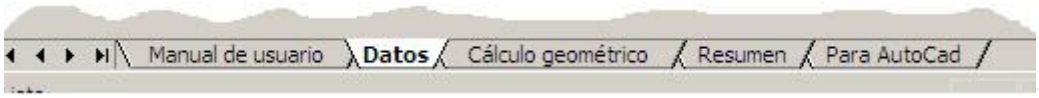


Figura 5. Hojas que componen el software.

¿Cómo funciona el software?

o **Datos.**

El objetivo de esta hoja es introducir los datos que se van a utilizar en el cálculo del par dentado: la relación de transmisión, u, la distancia interaxial a_w y el módulo, m_c. Ver Figura 6.

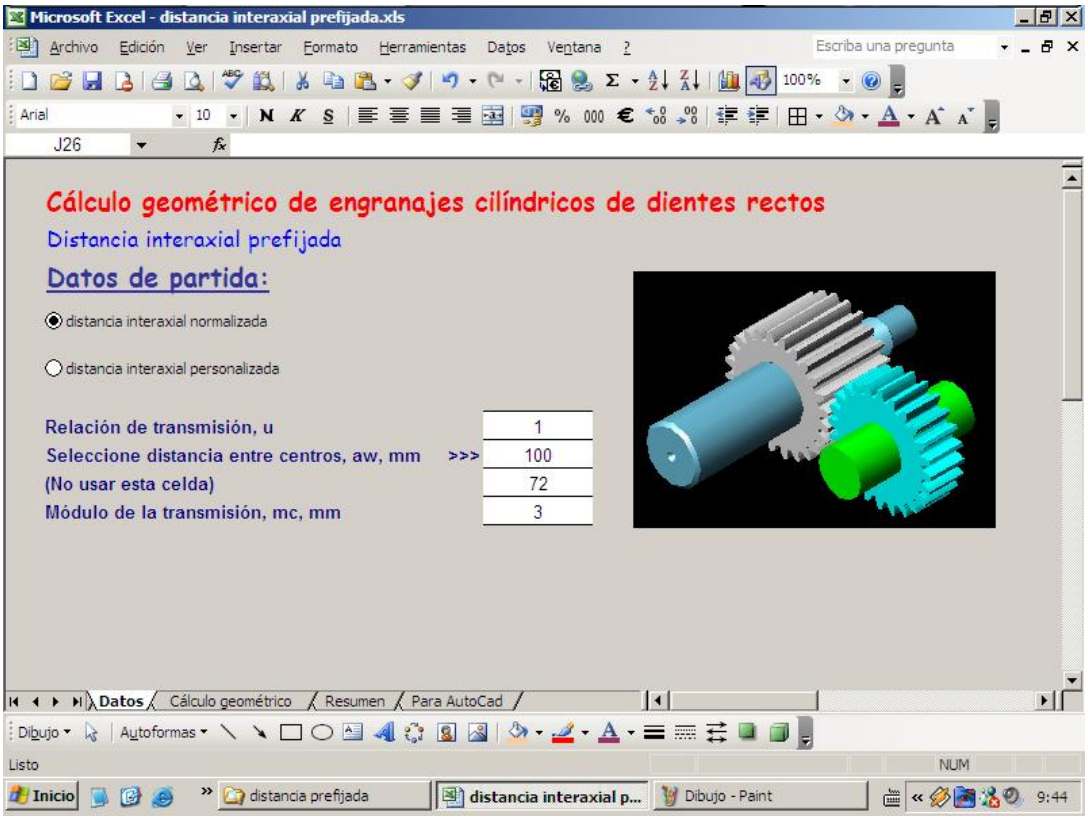


Figura 6. Apariencia de la hoja para la entrada de datos (Datos).

Esta hoja contiene botones de opción y celdas de entrada (variables) de dos tipos, simples y con menú desplegable. Como primer paso se debe seleccionar en los botones de opción si se trabajará con distancia interaxial normalizada o personalizada, como se ilustra en las Figuras 7 y 8. En las celdas de entrada simple, por ejemplo para introducir la relación de transmisión (u) o la distancia interaxial personalizada (si está seleccionada esta opción), simplemente se debe hacer un clic sobre la celda y entrar el valor que corresponda.

Figura 7. Selección de la distancia interaxial normalizada.

Figura 8. Selección de la distancia interaxial personalizada.

Las celdas de variables con menús desplegables, contienen valores normalizados de la distancia interaxial, a_w y del módulo, m_c. ¿Cómo funcionan estas celdas? Sencillamente, se hace un clic sobre la celda y a su derecha va a salir un botón con una cabeza de flecha; se hace un clic sobre este botón y se despliega una ventana con los valores normalizados (Figuras 7 y 9).

Como puede observarse en las Figuras 7 y 8 si se selecciona la distancia interaxial normalizada, a_w se selecciona en un menú desplegable, mientras que si se selecciona la personalizada, su valor se introduce por el teclado en una celda simple.

Figura 9. Selección del módulo de la transmisión.

- **Cálculo geométrico.**

En el cálculo geométrico se cuenta con celdas de comprobación que dicen si se cumplen o no las condiciones establecidas en ellas, como se ilustra en la Figura 10. En esta hoja no debe ser introducido ningún valor por el usuario, está destinada para que el usuario revise si con los datos introducidos es posible realizar la transmisión.

Coeficiente de corrección sumario, ξsum, mm	0,000		1
Selección del tipo de corrección, (Z1>17 Y ξsum = 0)	VERDADERO		
Coeficiente de corrección del piñón, ξ1, mm	0,000		
Coeficiente de corrección de la rueda, ξ2, mm	0,000	CORRECTO	
Radio interior del piñón, ri1, mm	32,25		
Grueso del diente por la circunferencia primitiva de la rueda, Sp2, mm	4,71		2
Comprobación, (re > rp > ri)	VERDADERO		
Radio medio entre re y rp en el piñón, rn1, mm	37,50		
Radio medio entre re y rp en la rueda, rn2, mm	37,50		
Grueso del diente por la circunferencia exterior del piñón, Se1, mm	2,15	CORRECTO	
Grueso del diente por la circunferencia exterior de la rueda, Se2, mm	2,15	CORRECTO	
Grado de Recubrimiento o Suavidad de la Marcha, ε, mm	1,60	CORRECTO	

Figura 10. Celdas de comprobación de la hoja "Cálculo geométrico".

En esta hoja de cálculo hay algunas celdas que tienen sus particularidades, estas celdas son las de los coeficientes de corrección (corrección sumaria, corrección del piñón y corrección de la rueda), las mismas funcionan de forma tal que en función de la corrección sumaria y del número de dientes del piñón se determinan o se calculan los coeficientes de corrección del piñón y de la rueda (ver diagrama de bloques en Figura 2). Cuando el número de dientes, Z1 es mayor que 17 y el coeficiente de corrección sumario es igual a cero, (se muestra el letrero "VERDADERO") se está en presencia de una rueda normal donde las celdas de corrección del piñón y de la rueda se hacen cero, Figura 6 (1). Ahora, cuando el número de dientes es mayor que 17 y el coeficiente de corrección sumario es diferente de cero (≠0) la corrección del piñón se hace cero y la de la rueda asume el valor de la corrección sumaria, pero, si además de ser distinto de cero el coeficiente de corrección, Z1 es menor de 17 entonces los coeficientes de corrección del piñón y la rueda se calculan según Goluvev, es decir:

$\xi 1 = (Z_{min} - Z_1) / Z_{min}$

$\xi 2 = \xi sum - \xi 1$ (El resultado puede ser positivo o negativo)

donde $Z_{min} = 17$

Aunque en los dos casos explicados en el párrafo anterior se muestre el letrero "FALSO", no significa que los resultados son erróneos, sencillamente indica que no se cumple la condición [$Z_1 > 17$ y $\xi sum = 0$], es decir que no se está en presencia de ruedas normales.

Con el objetivo de lograr valores del coeficiente de corrección dentro de los posibles según algunas recomendaciones, las celdas de los coeficientes de corrección del piñón y la rueda se limitan a sólo valores entre -0,5 y 0,8. Se tuvo en cuenta además que los engranajes con menos de 17 dientes solo deberán tener corrección positiva.

Para que se considere el problema correctamente resuelto no puede haber ningún mensaje de "INCORRECTO" y debe decir "VERDADERO" en la comprobación que se muestra en la Figura 6 (2).

o **Resumen.**

En esta hoja se ofrece un resumen de los datos geométricos necesarios para elaborar el plano de engranaje, como se ilustra en la Figura 11.

Datos para elaborar el plano del engranaje.

Parámetros básicos de las ruedas calculadas	Piñón mm	Rueda mm
diámetro de la circunsferencia exterior, de, mm	78,00	78,00
diámetro de la circunsferencia primitiva, d, mm	72,00	72,00
diámetro de la circunsferencia interior, di, mm	64,50	64,50
diámetro de la circunsferencia básica, do, mm	67,66	67,66
número de dientes, z, mm	24	24,00
coeficiente de corrección, x, mm	0,000	0,000
distancia interaxial,aw, mm	72	
módulo, mc, mm	3	

Figura 11. Resumen de los datos geométricos necesarios para elaborar los planos del par dentado calculado. (Hoja "Resumen")

o **Para AutoCAD.**

En esta hoja se brindan los datos geométricos necesarios para modelar el engranaje en AutoCAD como se muestra en la Figura 12.

Datos para modelar el engranaje en AutoCAD

Piñón		Rueda	
número de dientes, z	24	número de dientes, z	24,00
radio primitivo,rp, mm	36,00	radio primitivo,rp, mm	36,00
radio básico,ro, mm	33,83	radio básico,ro, mm	33,83
radio interior,ri, mm	32,25	radio interior,ri, mm	32,25
radio exterior,re, mm	39,00	radio exterior,re, mm	39,00
radio redondeo,r, mm	0,9	radio redondeo,r, mm	0,9
radio cualquiera,rn, mm	37,50	radio cualquiera,rn, mm	37,50
βp1 (grados)	3,75	βp2 (grados)	3,75
βo1 (grados)	4,60	βo2 (grados)	4,60
βn1 (grados)	2,76	βn2 (grados)	2,76
βe1 (grados)	1,58	βe2 (grados)	1,58

Figura 12. Resumen de los datos geométricos necesarios para modelar el par dentado calculado en AutoCAD. (Hoja "Para AutoCAD")

Programa en Excel para el cálculo geométrico de transmisiones por engranajes con distancia interaxial libre.

El software **"Cálculo geométrico de transmisiones por engranajes con distancia interaxial libre",** consta de las siguientes hojas, pasándose de una a otra haciendo clic en la etiqueta correspondiente, ver Figura 13:

- Instrucciones.
- Datos.
- Cálculo Geométrico.
- Tabla de involutas.
- Resumen.
- Para AutoCAD.

Figura 13. Hojas que componen el software.

¿Cómo funciona el software?

o **Datos.**

El objetivo de esta hoja es introducir los datos que se van a utilizar en el cálculo del par dentado: la relación de transmisión (u), el ángulo de engranaje (α_C), el módulo de transmisión (m_c) y el número de dientes del piñón (Z_1). En esta hoja aparecen celdas de entrada (variables) de dos tipos, simple y con menú desplegable. En la celda de entrada simple, por ejemplo para introducir la relación de transmisión, u, simplemente se debe hacer un clic sobre la celda y entrar el valor que corresponda. Ver Figura 14.

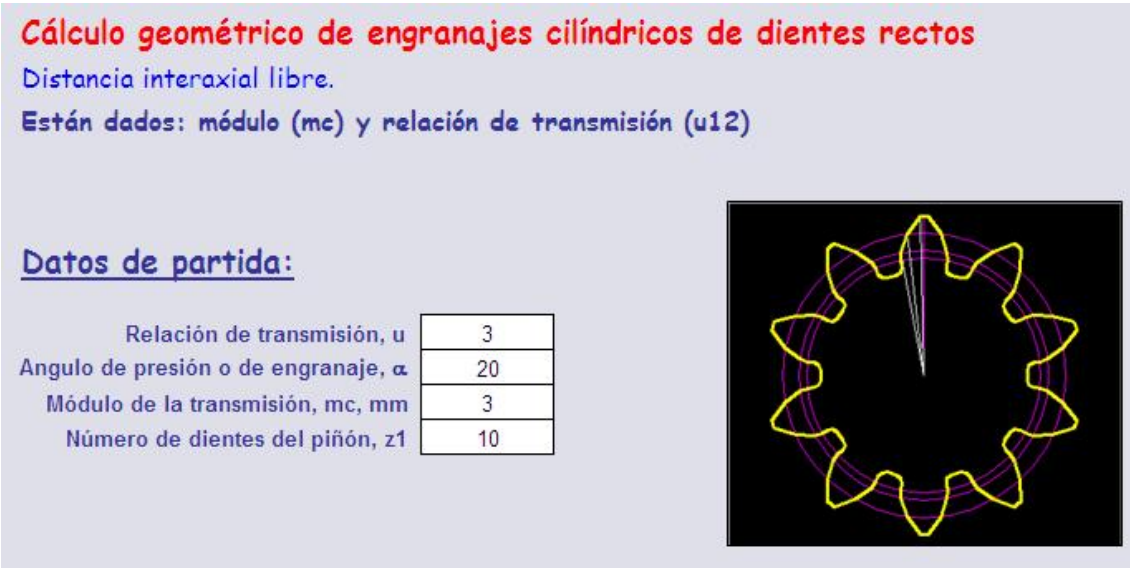


Figura 14. Apariencia de la hoja para la entrada de datos (Datos).

Las celdas de variables con menús desplegables, contienen valores normalizados del ángulo de engranaje o de presión, α y del módulo, mc, así como números de dientes, Z_1, desde 9 hasta 17. ¿Cómo funcionan estas celdas? Sencillamente, se hace un clic sobre la celda y a su derecha va a salir un botón con una cabeza de flecha; se hace un clic sobre este botón y se despliega una ventana con los valores normalizados (Figuras 15, 16 y 17).

Al hacer clic en la celda correspondiente al número de dientes del piñón, Z_1, se activa el mensaje que se muestra en la Figura 6. Si por razones tecnológicas no es posible tallar ruedas con desplazamiento de la cremallera (con corrección), entonces se deberá teclear el número de dientes del piñón, Z_1, mayor o igual a 17, es decir, tanto el piñón como la rueda serán normales (sin corrección, $\xi_1=\xi_2=0$).

Al elegir valores de Z1 mayores que 17, al no estar incluidos en la lista por no ser los recomendados para disminuir el tamaño de estas transmisiones que no tienen prefijada la distancia interaxial, aparece la ventana que se muestra en la Figura 18, se debe hacer clic en aceptar para continuar con el valor introducido.

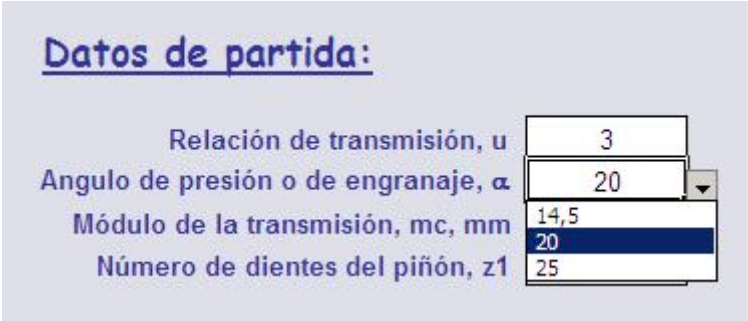


Figura 15. Selección del ángulo de engranaje, generalmente 20º.

Figura 16. Selección del módulo normalizado.

Figura 17. Selección del número de dientes.

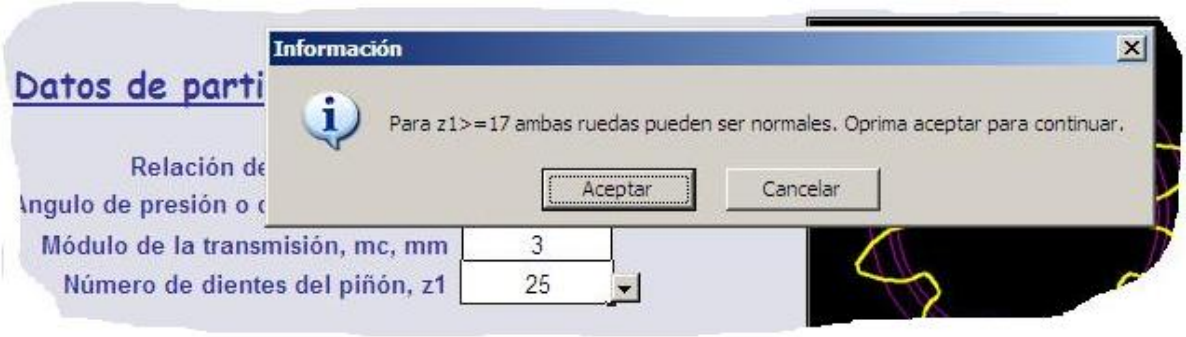


Figura 18. Entrada por el teclado del número de dientes (Z_1>17).

o **Cálculo Geométrico.**

En esta hoja es donde se realiza el cálculo de los parámetros geométricos de la transmisión, en la misma se cuenta con celdas de comprobación que dicen si se cumplen o no las condiciones establecidas en ellas (Figura 19).

Con el objetivo de lograr valores del coeficiente de corrección dentro de los posibles según algunas recomendaciones, las celdas de los coeficientes de corrección del piñón se limitan a sólo valores entre -0,5 y 0,8. Se tuvo en cuenta además que los engranajes con menos de 17 dientes solo tendrán corrección positiva (en este caso entre 0 y 0.8).

Se debe tener en cuenta que si el número de dientes del piñón tiene más de 17 dientes, no necesita corrección por lo que en la celda "Adopción del coeficiente de corrección del piñón, ξ1", se entrará 0 (cero), mientras que si Z_1 es menor que 17, en esta celda se entra el valor calculado en la celda anterior o su valor redondeado como se muestra en la Figura 19 (1).

La entrada del ángulo de montaje es un paso muy importante del problema, Figura 19 (2), siendo este, junto a la adopción del coeficiente de corrección, los únicos valores que deben ser entrados por el usuario en esta hoja, ver explicaciones de la hoja "tabla de involutas".

Número de dientes de la rueda, z2 (redondeado)	30		1
Coeficiente de corrección del piñón (calculado), ξ1, mm	0,412	CORRECTO	
Adopción del coeficiente de corrección del piñón, ξ1, mm	0,4		
Involuta del ángulo de montaje, inv αmo	0,0221838		2
Ángulo de montaje, αmo	22,32	<<< Entre el valor que corresponda según la tabla de involutas	
Distancia entre centros, aw, mm	60,95		
Radio interior del piñón, ri1, mm	12,45		
Radio medio entre re y rp en la rueda, rn2, mm	46,37		3
del diente por la circunferencia exterior del piñón, Se1, mm	1,31	CORRECTO	
el diente por la circunferencia exterior de la rueda, Se2, mm	2,47	CORRECTO	
Grado de Recubrimiento o Suavidad de la Marcha, ε, mm	1,32	CORRECTO	4

Figura 19. Celdas particulares de la hoja para el cálculo geométrico. 1, comprobación del coeficiente de corrección, 2, entrada por el usuario del ángulo de montaje, 3, Comprobación del grueso de la cabeza del diente, 4.Comprobación del grado de recubrimiento.

Se considera que el cálculo geométrico estará correctamente realizado, si luego de entrar los valores correspondientes al coeficiente de corrección y de la involuta del ángulo de montaje, todas las celdas de comprobación dicen "CORRECTO", se exceptúa la comprobación que se muestra en la Figura 7(1), si el número de dientes del piñón es mayor de 17 dientes.

o **Tabla de involutas.**

En esta hoja se ofrecen los valores de involuta para los ángulos de montaje desde 18.1º hasta 24º con un incremento de 0.1º, por lo que para conocer el valor del ángulo que corresponde a una involuta obtenida durante el cálculo geométrico es preciso interpolar entre los valores de la tabla.

El usuario debe seleccionar en la tabla los valores de involuta por defecto y por exceso (así como sus correspondientes ángulos) y entrarlos en la tabla que se indica, el valor de la involuta calculada y de la solución aparece en rojo según se muestra en la Figura 20 y se obtienen automáticamente. El valor de la SOLUCIÓN debe entrarse en la celda correspondiente de la hoja "Cálculo geométrico", ver Figura 19 (2), es decir sustituir el número que tenga la celda en ese momento, por el obtenido en SOLUCIÓN, que es el que corresponde al problema que se esté resolviendo.

Entre los valores según se indican en la figura, para interpolar:

α grados	inv α
22,1	0,02034013
22,2	[illegible]
22,6	0,02161541
22,7	0,02211932
22,8	0,02242622
22,9	0,02273614

valores por defecto

valores por exceso

	inv α	α grados	
(defecto) A	0,02211932	22,7	D
B	0,02218379	22,72	SOLUCIÓN
(exceso) C	0,02242622	22,8	E

Figura 20. Indicaciones para realizar la interpolación

Donde:

A- valor de la involuta en la tabla, por defecto.

B- involuta del ángulo de montaje, inv α_{mo} (viene del cálculo geométrico).

C- valor de la involuta en la tabla, por exceso.

D- ángulo que corresponde a la involuta A.

E- ángulo que corresponde a la involuta C.

o **Resumen.**

En esta hoja se ofrece un resumen de los datos geométricos necesarios para elaborar el plano de engranaje, como se ilustra en la Figura 21.

Datos para elaborar el plano del engranaje.

Parámetros básicos de las ruedas calculadas	Piñón mm	Rueda mm
diámetro de la circunsferencia exterior	38,25	95,85
diámetro de la circunsferencia primitiva	30,00	90,00
diámetro de la circunsferencia interior	24,90	82,50
diámetro de la circunsferencia basica	28,19	84,57
número de dientes	10	30
coeficiente de corrección	0,400	0,000

distancia interaxial, mm	61,12
módulo, mm	3

Figura 21. Resumen de los datos geométricos necesarios para elaborar los planos del par dentado calculado. (Hoja "Resumen")

o **Para AutoCAD.**

En esta hoja se brindan los datos geométricos necesarios para modelar el engranaje en AutoCAD como se muestra en la Figura 22.

Datos para modelar el engranaje en AutoCAD

Piñón z1 = 10		Rueda z2 = 30	
radio primitivo,rp, mm	15,00	radio primitivo,rp, mm	45,00
radio básico,ro, mm	14,10	radio básico,ro, mm	42,29
radio interior,ri, mm	12,45	radio interior,ri, mm	41,25
radio exterior,re, mm	19,12	radio exterior,re, mm	47,92
radio redondeo,r, mm	0,9	radio redondeo,r, mm	0,9
radio cualquiera,rn, mm	17,06	radio cualquiera,rn, mm	17,06
βp1 (grados)	10,67	βp2 (grados)	3,00
βo1 (grados)	11,52	βo2 (grados)	3,85
βn1 (grados)	6,74	βn2 (grados)	2,25
βe1 (grados)	1,50	βe2 (grados)	1,50

Figura 22. Resumen de los datos geométricos necesarios para modelar el par dentado calculado en AutoCAD. (Hoja "Para AutoCAD")

Modelación de ruedas dentadas cilíndricas en AutoCAD.

El dibujo del diente de la rueda dentada con perfil evolvente se fundamenta en la Figura 23, fórmulas que se derivan de ella y otras ya vistas en las secuencias de cálculo expuestas.

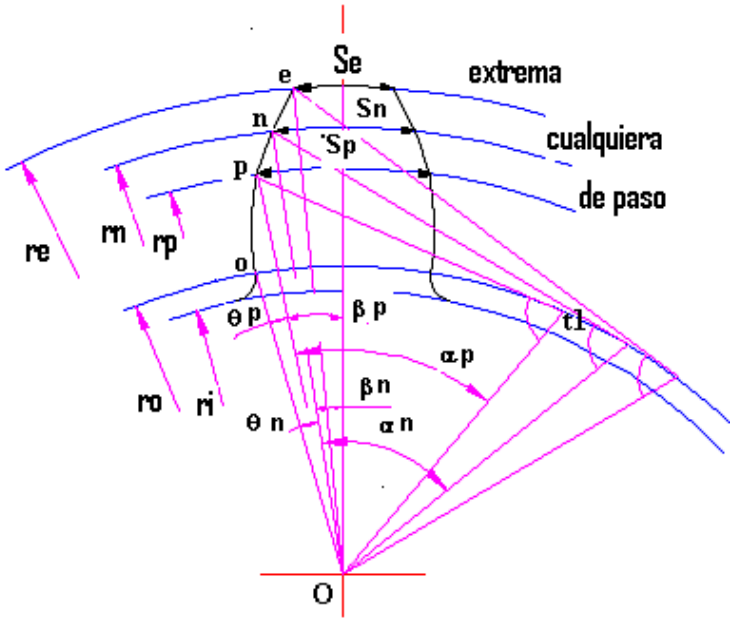


Figura 23. Parámetros geométricos que intervienen en la formación del perfil evolvente del diente del engranaje.

En la solución computarizada tanto para el cálculo geométrico de las ruedas dentadas con distancia interracial prefijada como con distancia interracial libre, el cálculo se realiza según la secuencia metodológica ante4s analizada, añadiéndose la determinación de los parámetros que definen el perfil evolvente que se realiza según las siguientes ecuaciones:

1. $\rho = (0.15...0.3)m_c$
2. r_n = cualquier valor entre r_p y r_e.
3. $\alpha_p = \alpha c = 20°$
4. $\alpha_n = \arccos (ro/rn)$
5. $\alpha_e = \arccos (ro/re)$
6. $\theta_p = \tan \alpha_p - \alpha_p$
7. $\theta_n = \tan \alpha_n - \alpha_n$
8. $\theta_e = \tan \alpha_e - \alpha_e$
9. $S_p = \pi m_c/2$
10. $\beta_p = S_p / 2r_p$
11. $\beta_o = \beta_p + \theta_p$
12. $\beta_n = \beta_o - \theta_n$
13. $\beta_e = \beta_o - \theta_e$
14. $S_e = 2\, r_e\, \beta_e$
15. $S_n = 2\, r_n\, \beta_n$

Una vez calculados los parámetros que definen el perfil del diente de la rueda dentada, con el empleo de las Hojas de Cálculo propuestas, se pasa a su representación en Autocad, bastando para su trazado los **radios** calculados y el **ángulo β** que forma cada punto notable con la vertical, Figura 24, la parte baja del pie del diente, que se encuentra dentro de la circunferencia básica se describe por una recta en el sentido radial, en el caso de engranajes con menos de 43 dientes, y tiene un radio de redondeo ρ con la circunferencia interior. Cuando las ruedas tienen mas de 43 dientes todo su perfil esta trazado por una evolvente por lo que durante su modelado debe prestarse atención a que

la altura del diente está comprendida, como en todos los casos, entre las circunferencias que pasan por la cabeza y el pie del diente. El hecho de tener más o menos de 43 dientes provoca que la circunferencia básica sea menor o mayor que la circunferencia que pasa por el pie del diente, cuestión que en definitiva determina la geometría del diente.

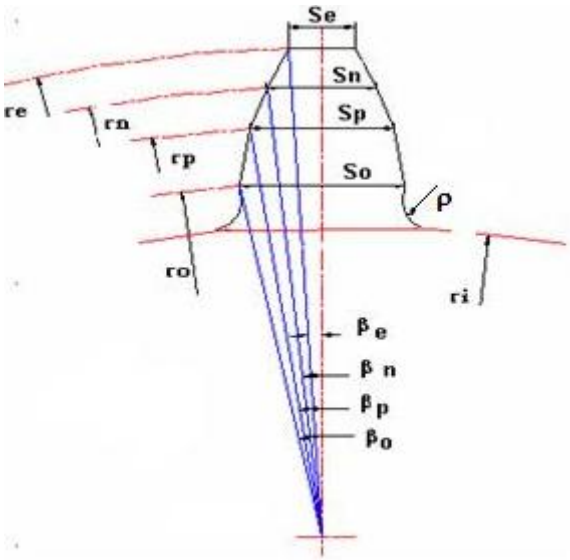


Figura 24. Localización de los parámetros para el modelado de una rueda dentada en AutoCAD

Secuencia para el dibujo de la rueda dentada empleando el Autocad:

Los pasos para el modelado de las ruedas en AutoCAD están en dependencia de la creatividad del usuario, no obstante proponemos una variante para la modelación de los mismos:

1- Establecer las capas necesarias para el dibujo (layer), se recomienda utilizar al menos cuatro capas, con su respectivo color ,una para las circunferencias[1], otra para las líneas de centro[2], otra para las líneas que definen el perfil del diente en su intersección con sus circunferencias respectivas[3] y la última para el contorno[4]. Figura 25

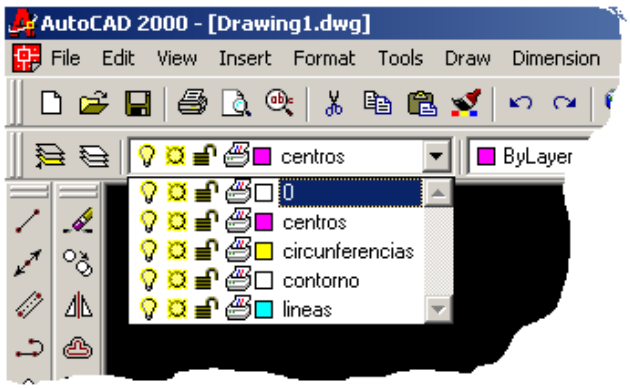


Figura 25. Propuesta de capas necesarias para el modelado de una rueda dentada en AutoCAD

2- En la capa 1 se trazan las circunferencias definidas por los radios calculados.

3- En la capa 2 se trazan las líneas de centro.

4- En la capa 3 se trazan líneas en coordenadas polares con origen en la intersección de los ejes, longitud igual al radio de cada una de las circunferencias (re, rn, rp y ro) y ángulo β_e, β_n, β_p y β_o según corresponda como se muestra en la Figura 26

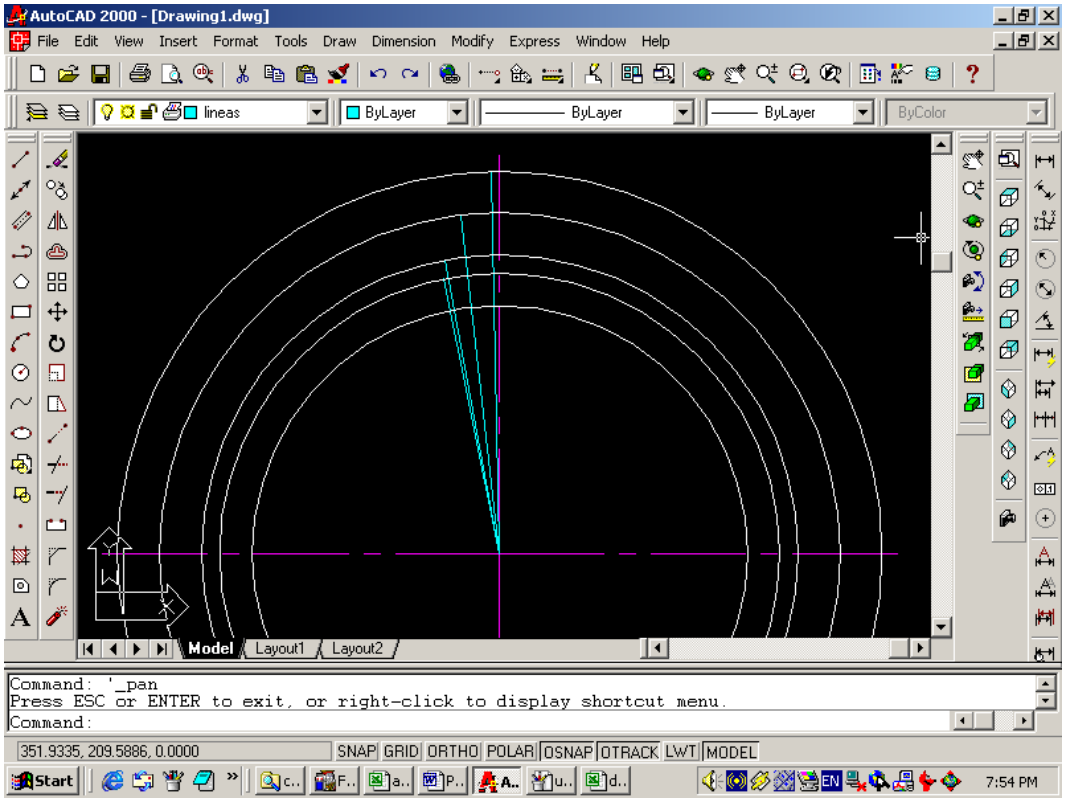


Figura 26. Determinación de los puntos que definen el perfil del diente.

5- Se traza la parte baja del pie del diente según indicación dada anteriormente y se unen los extremos de cada línea quedando definido el perfil del diente, luego se traza el radio de redondeo en el pie del diente. Con el comando simetría (mirror), tomando como línea de simetría el eje vertical, se obtiene la otra mitad del diente, concluyendo la construcción geométrica del mismo con el trazado del arco por la circunferencia exterior.

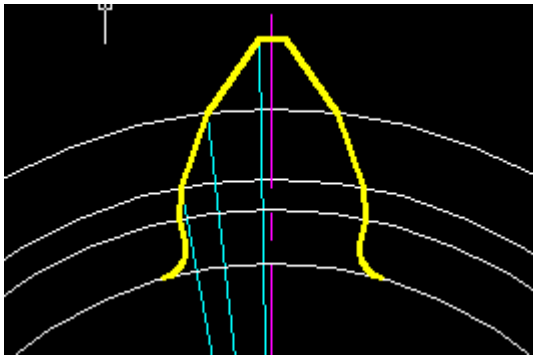


Figura 27. Trazado del diente de una rueda dentada en AutoCAD.

6- Con la utilización del comando matriz (array) se repite el diente trazado según el número de dientes Z de la rueda, Se "apaga" la capa de las circunferencias, se unen dos dientes consecutivos con un arco con centro en la intersección de los ejes y radio r_i, copiando luego este arco entre el resto de los dientes con una nueva matriz**.**

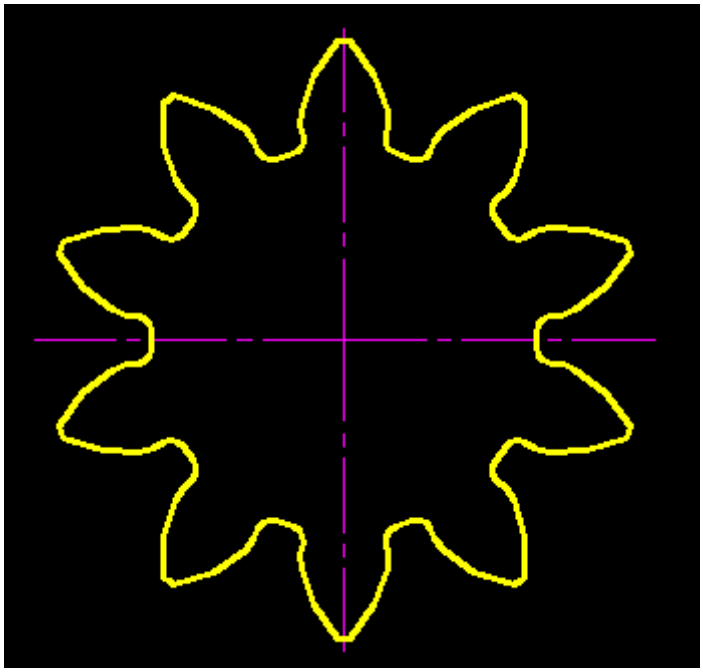


Figura 28. Modelado de una rueda dentada en AutoCAD (2D)

La rápida adopción de los sistemas CAD desde hace varios años ha limitado el uso de las técnicas gráficas tradicionales. Aunque incluso, con la ausencia de aplicación industrial en países con desarrollo computacional, muchos todavía creen que las técnicas de dibujo tradicionales pueden ser usadas aun por los estudiantes para ilustrar los conceptos que están detrás del análisis gráfico de los mecanismos.

Por supuesto que otros consideran que estos conceptos son idénticos a aquellos usados en el análisis gráfico usando los sistemas CAD, pero se requiere de un conocimiento previo de sus comandos para que el estudiante pueda concentrarse en el análisis cinemático propiamente dicho.

Conclusiones.

1- El cálculo de las transmisiones por engranaje analizadas con el empleo de
2- las Hojas de Cálculo propuestas se realizan en un tiempo considerablemente menor que de la manera tradicional, permitiendo escoger la solución más adecuada para cada caso concreto que se analice, constatando la validez de su aplicación.
3- El empleo de las funciones lógicas, formularios y las listas, entre otras posibilidades que nos brinda Excel, permiten la automatización de los cálculos con una intervención mínima del usuario durante la resolución del problema, aumentando de esta forma la confiabilidad de los resultados.
4- El programa para el cálculo de engranajes cilíndricos de dientes rectos nos brinda además de los datos necesarios para confeccionar los planos, aquellos que se necesitan para la modelación de las ruedas dentadas en AutoCAD.
5- Los estudiantes se encuentran preparados para interactuar con el programa de cálculo de engranajes cilíndricos de dientes rectos lo que se explica por el hecho de que están vinculados a la informática desde edades tempranas.
6- Ambos software brindan, además de los datos necesarios para confeccionar los planos, aquellos que se necesitan para la modelación de las ruedas dentadas en AutoCAD, que a su vez se utiliza como paso previo para la modelación con estos elementos empleando el Método de Elementos Finitos, razón que en definitivas fue la motivación para la creación del mismo, además de permitir la visualización de otros tipos de análisis en los engranajes que de manera puramente analítica resultarían muy complejos de investigar.

Bibliografía

1. Baranov, G.G.: *Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas*. Moscú. Editorial Mir. 2da Edición, 1985.
2. Dobrovoski, V.: *Elementos de Máquinas*. Ciudad de la Habana, 1990.
3. Golubev, Y. *Teoría de Máquinas y Mecanismos*. Editorial Pueblo y Educación [La Habana], 1978. Pág. 268.
4. Gear tooth generation. Disponible en http://www.mech.uwa.edu.au/DANotes/gears/generation/generation.html
5. González Quintero, Orestes. Casos típicos de cálculo geométrico de engranajes. Universidad de Matanzas. 2001. Disponible en la Intraweb en http://www.fiqm.umcc.cu/dptos/mecanica/mecaplic/mecanismos/pages/notas_contenido/Casos_tipos.htm
6. González Quintero, Orestes.. Metodología para el modelado de ruedas dentadas en AutoCAD 2001. Disponible en la Intraweb en http://www.fiqm.umcc.cu/dptos/mecanica/mecaplic/mecanismos/pages/notas_contenido/gear_drawing.htm
7. González Rey, G.: *Cálculo de Engranajes Cilíndricos*. Ciudad Habana, 2001.
8. GRUPO COBB: *El libro del Microsoft Excel*. Ed. Anaya Multimedia, Madrid, 1992. 823p.
9. Myszka, D.H.: *Machines and Mechanism Applied Kinematics Analysis*. Prentice-Hall Inc, 1999. ISBN: 0-13-597915-3.

Datos de los autores:

Lic. Orestes González Quintero, profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica. Facultad de Ingenierías Química y Mecánica. Universidad de Matanzas.

Dirección: Plácido 7106 entre San Antonio y Animas. Versalles. Matanzas. Matanzas

Código postal: 40100

Teléfono: 295733

email to orestes.gonzalez@umcc.cu

Dr. Ing. Eleno Alfonso Brindis. Jefe del Departamento de Ingeniería Mecánica. Facultad de Ingenierías Química y Mecánica. Universidad de Matanzas.

email to eleno.alfonso@umcc.cu

ANEXO: Nomenclatura utilizada

mc	Módulo
u_{12}	Relación de transmisión
aw	Distancia entre centros
z1	Número de dientes del piñón
z2	Número de dientes de la rueda
αmo	Ángulo de montaje
ξ_{sum}	Coeficiente de corrección sumario
ξ_1	Coeficiente de corrección del piñón
ξ_2	Coeficiente de corrección de la rueda
ri_1	Radio interior del piñón
ri_2	Radio interior de la rueda
re_1	Radio exterior del piñón
re_2	Radio exterior de la rueda
rp_1	Radio primitivo del piñón
rp_2	Radio primitivo de la rueda
ro_1	Radio básico del piñón
ro_2	Radio básico de la rueda
Sp_1	Grueso del diente por la circunferencia primitiva del piñón
Sp_2	Grueso del diente por la circunferencia primitiva de la rueda
αe_1	Ángulo de presión por la circunferencia exterior del piñón.
αe_2	Ángulo de presión por la circunferencia exterior de la rueda.
rn_1	Radio medio entre re y rp en el piñón
rn_2	Radio medio entre re y rp en la rueda
αn_1	Ángulo de presión por una circunferencia cualquiera del piñón.
αn_2	Ángulo de presión por una circunferencia cualquiera de la rueda.
θe_1	Ángulo para definir el perfil del diente
θe_2	Ángulo para definir el perfil del diente
θp	Ángulo para definir el perfil del diente
θn_1	Ángulo para definir el perfil del diente
θn_2	Ángulo para definir el perfil del diente
βp_1	Ángulo para definir el perfil del diente
βp_2	Ángulo para definir el perfil del diente
βo_1	Ángulo para definir el perfil del diente
βo_2	Ángulo para definir el perfil del diente
βe_1	Ángulo para definir el perfil del diente
βe_2	Ángulo para definir el perfil del diente
βn_1	Ángulo para definir el perfil del diente
βn_2	Ángulo para definir el perfil del diente
Sn_1	Grueso del diente por la circunferencia entre re y rp en el piñón
Sn_2	Grueso del diente por la circunferencia entre re y rp en la rueda
Se_1	Grueso del diente por la circunferencia exterior del piñón
Se_2	Grueso del diente por la circunferencia exterior de la rueda
ε	Grado de Recubrimiento o Suavidad de la Marcha