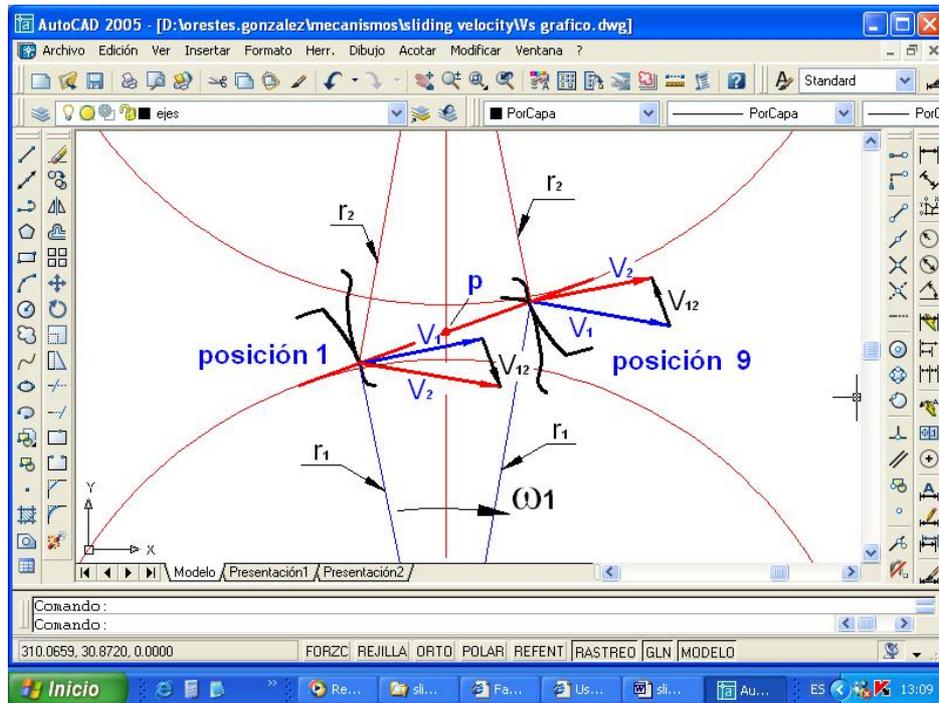


Influencia de la razón de transmisión en la velocidad específica de deslizamiento en ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos normales.



Autor: Lic. Orestes González Quintero.

Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica.

Universidad de Matanzas 2006

Resumen.

Las transmisiones por engranajes pueden sufrir múltiples deterioros durante su funcionamiento y entre las fallas más comunes se encuentra el desgaste, esta falla es propia de las transmisiones no lubricadas, y se caracteriza por la disminución del espesor del diente en la zona de la cabeza y del pie, que es donde mayor velocidad de deslizamiento existe. En este trabajo se hace un análisis de los factores que intervienen en el deslizamiento relativo de los dientes y se exponen las ecuaciones necesarias para el cálculo de las velocidades de deslizamiento, de desplazamiento y específica de deslizamiento, finalmente, utilizando un programa elaborado en una Hoja de Cálculo de Excel y con el empleo del software AutoCAD fueron evaluados cuatro casos de transmisiones por engranajes cilíndricos de dientes rectos, para determinar la influencia de la relación de transmisión en la velocidad específica de deslizamiento en ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos normales. El trabajo constituye una aplicación en contenidos propios de la Ingeniería Mecánica, de contenidos de Física recibidos por nuestros estudiantes durante su formación básica.

Palabras claves: Engranajes, velocidad de deslizamiento, velocidad de desplazamiento, velocidad específica de deslizamiento, desgaste.

Abstract.

Gear transmissions can suffer multiple fails during their operation, being wear one of the most common. This fail is characteristic of the not lubricated transmissions, and it is characterized by the decrease of the thickness of the tooth up and down the tooth height that is where main sliding velocity exists. In this work is made an analysis of the factors that intervene in the relative sliding of the teeth and the necessary equations for the calculation of the sliding, displacement and specific sliding velocity, are exposed, finally, using a program elaborated in a EXCEL spreadsheet and with the employment of the software AutoCAD, four cases of spur gear transmissions were evaluated, to determine the influence of the velocity ratio in the specific sliding velocity. The work constitutes an application in contents characteristic of the Mechanical Engineering, of contents of Physics received by our students during its basic formation.

Key words: Gearing, sliding velocity, displacement velocity, specific sliding velocity, wear

Introducción

Las ruedas dentadas son componentes de mecanismos enormemente usados, en general su función es transmitir el movimiento de rotación de un árbol a otro. En adición a la simple transmisión del movimiento, las ruedas dentadas son usadas a menudo para incrementar o reducir la velocidad o cambiar la dirección del movimiento desde un árbol al otro. Este mecanismo de tres miembros, en el cual dos elementos engranados son móviles y forman con el elemento fijo pares de rotación o traslación, es empleado en los más diversos campos y condiciones de trabajo: desde relojes y equipos de precisión hasta máquinas de grandes dimensiones.

Las ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos son las más simples y, por lo tanto, el tipo de rueda dentada más común, los dientes de estas son paralelos al eje de rotación.

El objetivo de este estudio es determinar la influencia de la razón de transmisión en la velocidad específica de deslizamiento en ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos normales.

Geometría de los engranajes cilíndricos de dientes rectos

A continuación, **figura 1**, se muestran los parámetros principales para el cálculo geométrico de las ruedas dentadas conociendo sus parámetros fundamentales (módulo, razón de transmisión y distancia interaxial). Generalmente se utilizan los subíndices 1 y 2 para el piñón y la rueda respectivamente.

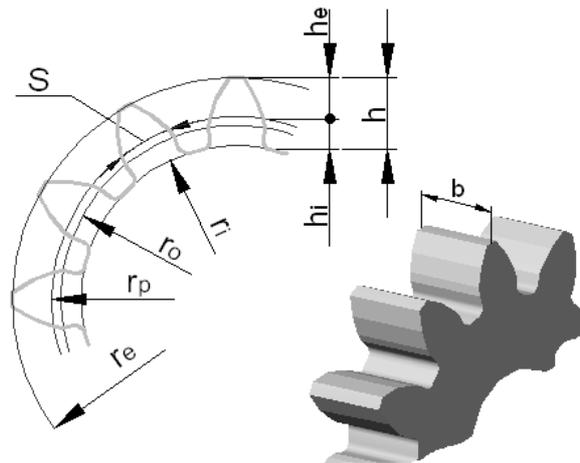


Figura 1 Parámetros geométricos de las ruedas dentadas de las ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos: r_i , radio de la circunferencia interior; r_o , radio de la circunferencia básica; r_p , radio de la circunferencia primitiva y r_e , radio de la circunferencia exterior.

Perfil evolvente de los dientes

Los dientes de los engranajes con el propósito de obtener un movimiento suave, deben tener una forma que mantenga a la rueda conducida rotando con una velocidad constante a lo largo del proceso de engrane y desengrane, es decir, los engranajes necesitan tener una razón de velocidad constante (razón o relación de transmisión). Cinemáticamente esta condición requiere que el camino del punto de contacto de los dientes engranados sea una línea recta. Esa línea debe también interceptar el punto común para ambas circunferencias primitivas, el polo de engrane. Cuando los perfiles de los dientes se diseñan de manera que produzcan una relación constante de velocidades angulares durante su funcionamiento en contacto, se dice que tienen acción conjugada, una posible solución a este problema la brinda el perfil de evolvente o de involuta, que es el más utilizado en la mayoría de los casos, salvo algunas excepciones. Para transmitir movimiento con relación constante de velocidades angulares, el polo de engrane debe permanecer fijo, es decir, todas las líneas de acción para todo punto de contacto instantáneo deben pasar por el mismo punto **p**. En el caso del perfil de evolvente todos los puntos de contacto están sobre, la misma recta T_1-T_2 , así como todas las normales a los perfiles de los dientes en el punto de contacto coinciden con dicha recta, como se ilustra en la **figura 2**, por lo tanto, estos perfiles transmiten movimiento rotatorio uniforme.

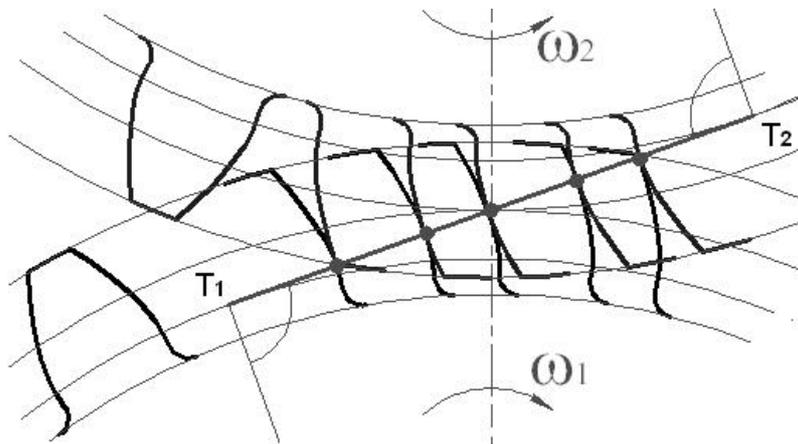


Figura 2 Secuencia del desplazamiento del punto de contacto entre los dientes desde el comienzo hasta el fin del engrane.

La recta T_1-T_2 , que representa la dirección en que actúan las fuerzas, recibe el nombre de línea de engranaje o de presión. Esta recta cortará la línea de los centros O-O en el polo de engrane, **p**. La relación existente entre las velocidades angulares de las ruedas engranadas es inversamente proporcional a la de los radios al punto **p** (r_p).

Por evolvente se entiende la curva generada al desarrollar un círculo en el plano, siendo la circunferencia básica la elegida para desarrollarla. En las ruedas normales el radio de la circunferencia básica se determina según la ecuación:

$$r_o = r \cos \alpha \quad (1)$$

El ángulo α , que para las ruedas normales es además el ángulo de presión se toma en la mayoría de los casos, igual a 20° .

A partir del punto **a**, de la circunferencia básica, se ha trazado la curva involuta (evolvente), como se muestra en la **figura 3**, siendo la normal a la evolvente en cualquier punto, una línea tangente a la circunferencia básica, por ejemplo, la línea **bc**, por otra parte, el radio de curvatura de la evolvente es igual al arco correspondiente de la circunferencia básica (la línea **bc=arco ab**)

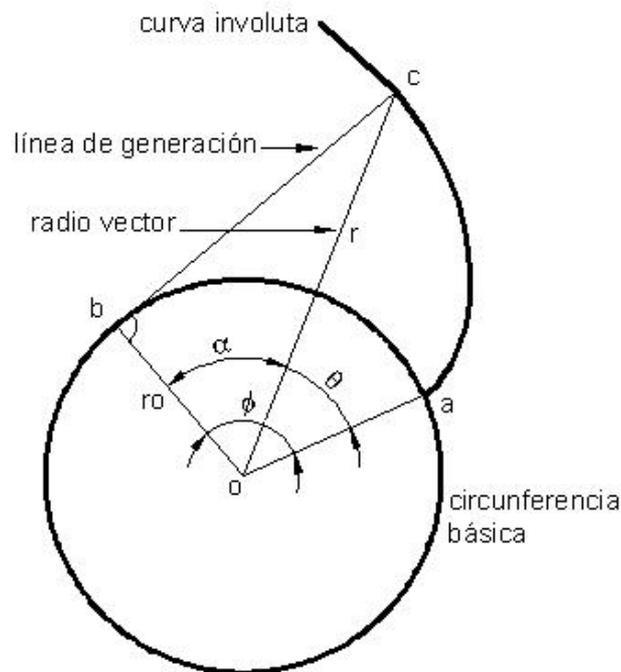


Figura 3 En torno a la deducción de la ecuación evolvente de un círculo.

Las relaciones geométricas de la evolvente se pueden expresar como sigue:

$$\theta = \phi - \alpha = \phi - \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{r^2 - r_o^2}}{r_o} \right] \quad (2)$$

$$\sqrt{r^2 - r_o^2} = r_b \phi \quad (3)$$

$$\phi = \frac{\sqrt{r^2 - r_o^2}}{r_o} \quad (4)$$

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - r_o^2}}{r_o} - \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{r^2 - r_o^2}}{r_o} \right] \quad (5)$$

Esta es la ecuación polar de la curva involuta. La forma de la evolvente depende solamente del radio de la circunferencia básica.

El ángulo θ se llama involuta del ángulo α , su magnitud tiene gran importancia en el cálculo de los dientes.

Rodadura y velocidad de deslizamiento.

El rodamiento puro ocurre si dos discos de fricción rotan en contacto sin deslizamiento. Sin embargo, para dos dientes de perfil evolvente engranados, la acción del engranaje es una combinación de rodadura y deslizamiento. La **figura 4** muestra dos ruedas dentadas con circunferencias básicas iguales engranadas una con otra.

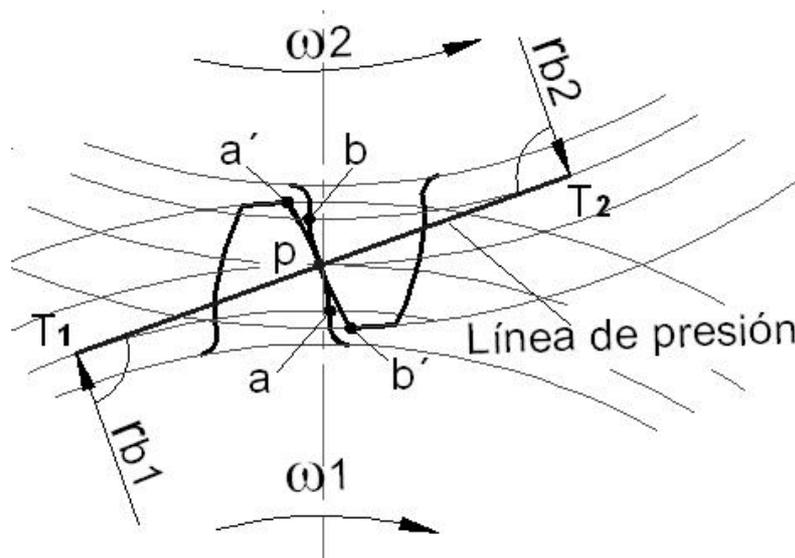


Figura 4 En torno a la causa que motiva el deslizamiento de los dientes durante el engrane.

Los dientes están en contacto en el polo de engrane, los radios de curvatura de las dos evolventes son mostrados entre los puntos **a- a'**, para el piñón y **b-b'**, para la rueda. De la figura se ve que las partes correspondientes de los perfiles de trabajo no son iguales, es decir, para el elemento motriz $ap < pa'$ y para el perfil movido $bp < pb'$. Por lo tanto, los dos perfiles deben deslizarse uno sobre otro durante el engrane para compensar la

diferencia en las longitudes de los arcos. Bajo esta condición y con referencia a la **figura 5**, la velocidad de deslizamiento en cualquier punto es calculada como:

$$V_k = \rho_1 \omega_1 - \rho_2 \omega_2 \quad (6)$$

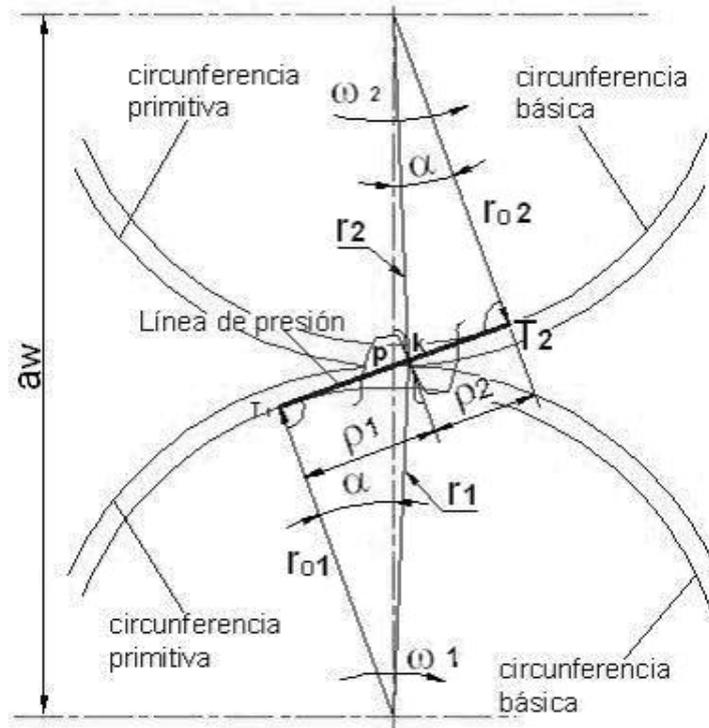


Figura 5 En torno a la deducción de la ecuación de la velocidad de deslizamiento.

Según lo conocido:

$$V = \frac{2\pi \cdot r_{p1} \cdot n_1}{60} = \frac{2\pi \cdot r_{p2} \cdot n_2}{60} \quad (7)$$

$$V = \omega_1 r_{p1} = \omega_2 r_{p2} \quad (8)$$

$$\omega_1 = \frac{V}{r_{p1}} \quad (9)$$

$$\omega_2 = \frac{r_{p1} \omega_1}{r_{p2}} \quad (10)$$

$$u_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad (11)$$

$$\rho_1 + \rho_2 = a_w \operatorname{sen} \alpha \quad (12)$$

$$\rho_1 = \sqrt{r_1^2 - r_{o1}^2} \quad (13)$$

$$\rho_2 = \sqrt{r_2^2 - r_{o2}^2} \quad (14)$$

donde:

r_{p1}, r_{p2} : radios de las circunferencias primitivas del piñón y la rueda, m.

r_{o1}, r_{o2} : radios de las circunferencias básicas del piñón y la rueda, m.

r_1, r_2 : radios cualquiera de los perfiles de los dientes del piñón y la rueda, m.

ρ_1, ρ_2 : radios de curvatura del punto de contacto en r_1 y r_2 , m.

ω_1, ω_2 : velocidades angulares del piñón y la rueda, rad/s

a_w : distancia entre centros, m.

n_1, n_2 : frecuencias de rotación del piñón y la rueda, r/min

V : velocidad lineal en el polo de engrane, m/s

V_k : velocidad de deslizamiento, m/s

α : ángulo de presión.

Usando los parámetros anteriores, la velocidad de deslizamiento puede ser rescrita como:

$$V_k = \left[\frac{V(r_{p1} + r_{p2})}{r_{p1}r_{p2}} \right] \left(\sqrt{r_1^2 - r_{o1}^2} - r_{p1} \text{sen} \alpha \right) \quad (15)$$

Resulta necesario señalar, que siempre se supone que la relación de transmisión u , tiene signo. Al determinar este parámetro por la fórmula 11, el signo no es evidente, por lo cual se le añade el signo negativo cuando el engranaje es exterior y positivo cuando es interior.

La velocidad V_k es la velocidad de deslizamiento del diente de una rueda sobre el diente de la otra. Cuando esto ocurre son inevitables las pérdidas por rozamiento que son proporcionales a la velocidad del deslizamiento. Esta velocidad de deslizamiento juega un papel decisivo en la potencia consumida en vencer la fricción, y las condiciones de máxima resistencia al desgaste se garantizarán ubicando la línea de engranajes en una zona donde su valor sea el menor posible y esté compensado tanto a la entrada como a la salida del contacto, razón por lo que para disminuir dichas pérdidas se necesita, siendo las velocidades angulares ω_1 y ω_2 invariables, disminuir la distancia entre el punto de contacto \mathbf{K} y el polo de engrane \mathbf{p} , magnitud l en la figura 6.

La velocidad de deslizamiento de un punto K (ver figuras 5 y 6) se puede calcular también, considerando la magnitud l , por la expresión:

$$Vk = l(\omega_2 - \omega_1) \quad (16)$$

La fórmula 16 puede ser rescrita además en la siguiente forma:

$$Vk = l\omega_2(1 - u_{12}) \quad (17)$$

Donde la magnitud l , por su parte, puede determinarse como:

$$l = \rho_1 - (rp_1 \text{sen} \alpha) \quad (18)$$

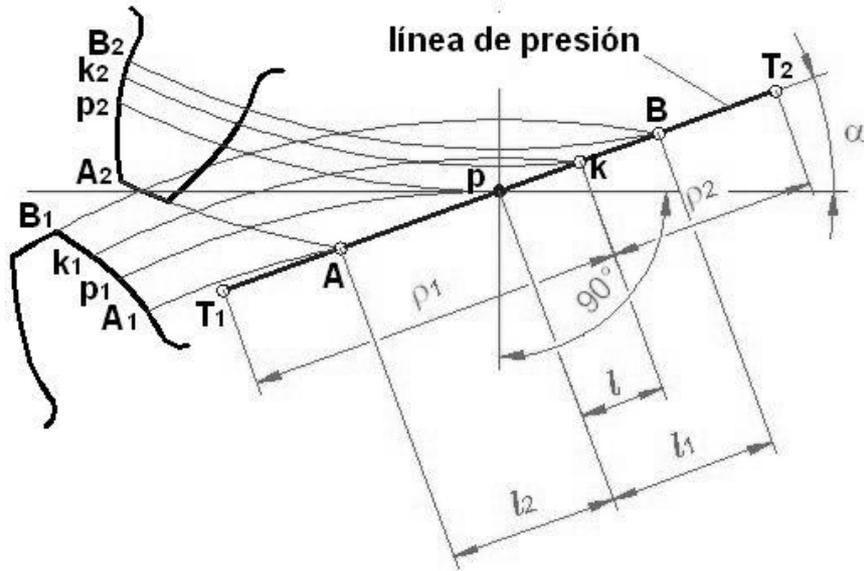


Figura 6 Radios de curvatura ρ_1 y ρ_2 y distancia l , entre el punto de contacto k y el polo de engrane p .

Velocidad específica de deslizamiento.

Además del deslizamiento de un diente sobre otro, durante el proceso de engrane y desengrane el punto K se desplaza por el perfil del diente del piñón. Designando esta velocidad como Vk_1 encontramos:

$$Vk_1 = r_{p1} \frac{\rho_1}{\rho_1 - l} \omega_1 \text{sen} \alpha \quad (19)$$

El desgaste del perfil del diente es directamente proporcional a la velocidad específica de deslizamiento, que es el cociente entre la velocidad de deslizamiento Vk y la velocidad de desplazamiento del punto de contacto Vk_1 , por este perfil, encontrándose su valor por la siguiente ecuación:

$$c_1 = \frac{Vk}{Vk_1} = \frac{l(\rho_1 - l)(u_{21} - 1)}{\rho_1 r_{p1} \text{sen} \alpha} \quad (20)$$

De manera análoga se determinan V_{k_2} y c_2 , usando los subíndices correspondientes.

La magnitud c_1 es uno de los parámetros principales que deberá determinarse al analizar y diseñar mecanismos con ruedas dentadas.

En la figura 6 se observa que los puntos de tangencia T1 y T2, de la línea de presión con la circunferencia básica, no cambian sus posiciones al desplazarse el punto de contacto K por la línea práctica de engrane, comprendida entre los puntos A y B, que a su vez representan los puntos inicial y final de contacto entre un par de dientes. Los puntos T1 y T2 constituyen los centros de curvatura de ambas evolventes para cualquier posición del punto K, siendo ρ_1 y ρ_2 los radios de curvatura del piñón y la rueda respectivamente (distancias entre los puntos k y T1 para el piñón y entre los puntos k y T2 para la rueda). Los radios de curvatura ρ_1 y ρ_2 varían su magnitud durante el desplazamiento del punto de contacto por la línea práctica de engrane.

A partir de las figuras 5 y 6, se deduce además que:

$$\rho_1 - l = r_1 \operatorname{sen} \alpha \quad (21)$$

De ahí que la velocidad específica de deslizamiento del diente del piñón, pueda computarse como:

$$c_1 = \frac{l}{\rho_1} (u_{21} - 1) \quad (22)$$

El desgaste del perfil del diente además de ser proporcional a la magnitud c_1 , es también directamente proporcional a la velocidad angular de las ruedas engranadas, por su relación con la frecuencia con que engranan los dientes, por lo que el desgaste de los dientes es proporcional al producto:

$$c_1 \omega_1 = \frac{l}{\rho_1} (u_{21} - 1) \omega_1 = \frac{l}{\rho_1} (\omega_2 - \omega_1) \quad (23)$$

Con las ecuaciones anteriores se elaboró un programa de computación en una Hoja de Cálculo de Excel, donde a partir de la entrada de un conjunto de datos, como se ilustra en la **figura 7**, el programa determina la magnitud, entre otros, de la velocidad de deslizamiento, las velocidades de desplazamiento y específica de deslizamiento para el piñón y la rueda.

Entrada de datos

módulo, m , mm	3			relación de transmisión, u_{12}	4		
No. De dientes, Z_1	24			distancia interaxial, a_w , mm	180		
No. De dientes, Z_2	96			No. de rpm, n_1 , r/min	180		
ángulo de presión	20			No. de rpm, n_2 , r/min	45		
a_w m	r_{p1} m	r_{p2} m	r_{o1} m	r_{o2} m	V m/s	r_{e1} m	r_{e2} m
0,18	0,036	0,144	0,034	0,135	0,68	0,039	0,147
radio menor de la línea práctica de engrane en el piñón, (r_1 (1)), m						0,03408	
radio menor de la línea práctica de engrane en la rueda, (r_2 (9)), m						0,14173	

Figura 7 En torno a los datos de partida para el cálculo de la velocidad específica de deslizamiento, c_1 y c_2 .

Con el empleo de dicha Hoja de Cálculo fueron evaluados cuatro casos de transmisiones por engranajes cilíndricos de dientes rectos, para determinar la influencia de la relación de transmisión (u_{12}) en la velocidad específica de deslizamiento en ruedas dentadas normales. Se precisó también el empleo del AutoCAD, para la representación de las transmisiones analizadas, necesaria para el establecimiento de la línea práctica de engrane y la correspondiente determinación gráfica del radio menor de la línea práctica de engrane en el piñón y en la rueda, como se ilustra en la **figura 8**, datos estos, que se introducen en el programa (en metros).

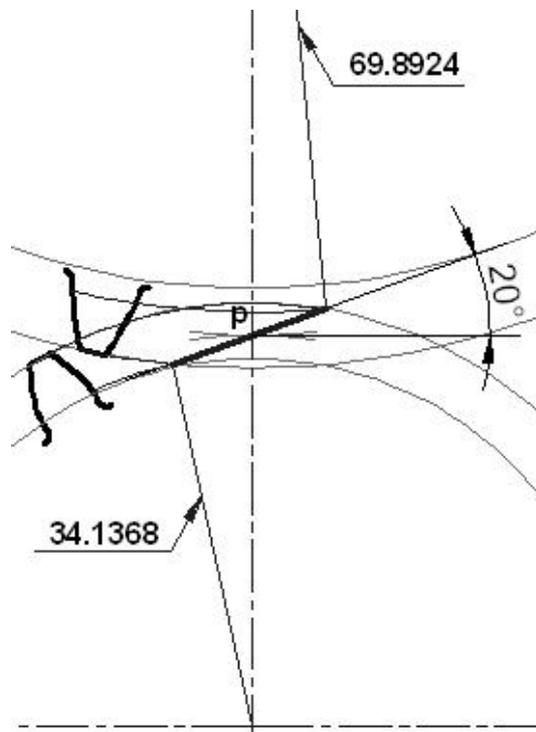


Figura 8 En torno a la determinación del radio menor de la línea práctica de engrane en el piñón y en la rueda.

Para el cálculo de la velocidad específica de deslizamiento en el perfil de trabajo del diente de la rueda dentada, se dividió la línea práctica de engrane en dos: la primera mitad desde el comienzo de dicha línea hasta el polo de engranaje, lugar donde se hace cero la velocidad específica de deslizamiento, y la segunda mitad desde el polo hasta el final de la línea práctica de engrane. Cada una de estas partes se dividió entre cuatro de la forma que se muestra a continuación:

Para el piñón

$$-\text{incremento1} = (r_{p1} - r_1) / 4$$

$$-\text{incremento2} = (r_{e1} - r_{p1}) / 4$$

Para la rueda

$$-\text{incremento2} = (r_{e2} - r_{p2}) / 4$$

$$-\text{incremento1} = (r_{p2} - r_2) / 4$$

donde:

-r1 es el radio menor de la línea práctica de engrane en el piñón, (punto 1), m.

-r2 es el radio menor de la línea práctica de engrane en la rueda, (punto 9), m

Por lo que se determinó la velocidad específica de deslizamiento en nueve puntos incluyendo el polo de engranaje (r_p es el punto 5). Resulta necesario aclarar que la línea práctica de engrane no queda dividida equidistantemente, pero el radio del punto de contacto en ambas ruedas (r_1 y r_2), crece a intervalos regulares a cada lado del polo de engranaje.

Tabla 1. Parámetros geométricos de las ruedas dentadas que intervinieron en el estudio.

<u>Parámetros</u>	Piñón mm	Rueda mm	Rueda mm	Rueda mm	Rueda mm
diámetro de la circunferencia exterior	78.00	78.00	150.00	222.00	294.00
diámetro de la circunferencia primitiva	72.00	72.00	144.00	216.00	288.00
diámetro de la circunferencia interior	64.5	64.5	136.50	208.5	280.5
diámetro de la circunferencia básica	67.66	67.66	135.32	202.97	270.63
número de dientes	24	24	48	72	96
módulo, mm	3				

Razón de transmisión, u_{12}	1	2	3	4
Distancia entre centros, a_w , mm	72.00	108.00	144.00	180.00
Frecuencia de rotación, n_2 , r/min	180	90	60	45

Resultados obtenidos.

En la tabla 2 se muestran los resultados obtenidos con la aplicación del programa para la cuarta variante, razón de transmisión, $u_{12}=4$, los resultados del calculo de la velocidad de deslizamiento, V_k , para todas las variantes se ilustran en la **figura 9** y los de la acción combinada de la velocidad específica de deslizamiento con la velocidad angular, $c_1\omega_1$ y $c_2\omega_2$, objetivo de este trabajo, son mostrados en la **figura 10**. Así mismo en la **figura 11**, a manera de ejemplo, se muestran las curvas de desgaste obtenidas para la primera variante, obtenidas mediante el traslado de cada punto de contacto por la circunferencia correspondiente sobre el perfil de trabajo del piñón y de la rueda, trazando luego, desde los puntos obtenidos, en dirección normal al perfil, las magnitudes $c_1\omega_1$ y $c_2\omega_2$ calculadas.

Tabla 2. Resultados obtenidos con la aplicación del programa para la razón de transmisión, $u_{12}=4$.

Vk m/s	Vk1 m/s	Vk2 m/s	c1	c2	c1 ω_1 rad/s	c2 ω_2 rad/s
-0,19	0,08	0,27	2,48	-0,71	46,68	-3,36
-0,12	0,13	0,26	0,93	-0,48	17,47	-2,27
-0,07	0,17	0,25	0,44	-0,30	8,20	-1,43
-0,03	0,20	0,24	0,17	-0,15	3,23	-0,69
0,00	0,23	0,23	0,00	0,00	0,00	0,00
0,05	0,27	0,22	-0,18	0,22	-3,36	1,02
0,09	0,31	0,21	-0,30	0,43	-5,63	2,01
0,13	0,34	0,21	-0,39	0,63	-7,31	2,99
0,17	0,37	0,20	-0,46	0,84	-8,61	3,96



Figura 9. Resultados del cálculo de la velocidad de deslizamiento, V_k , para todas las variantes

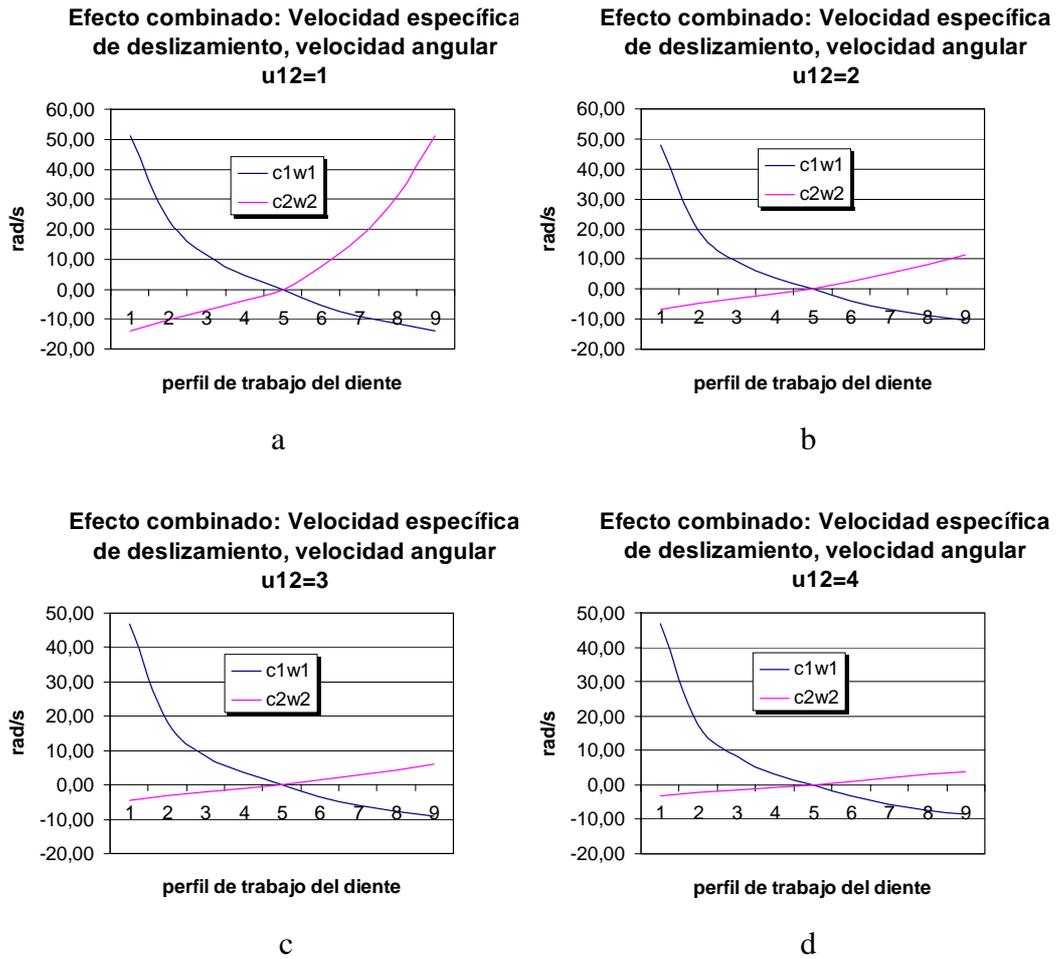


Figura 10. Resultados del cálculo de acción combinada de la velocidad específica de deslizamiento con la velocidad angular, $c_1\omega_1$ y $c_2\omega_2$, para todas las variantes

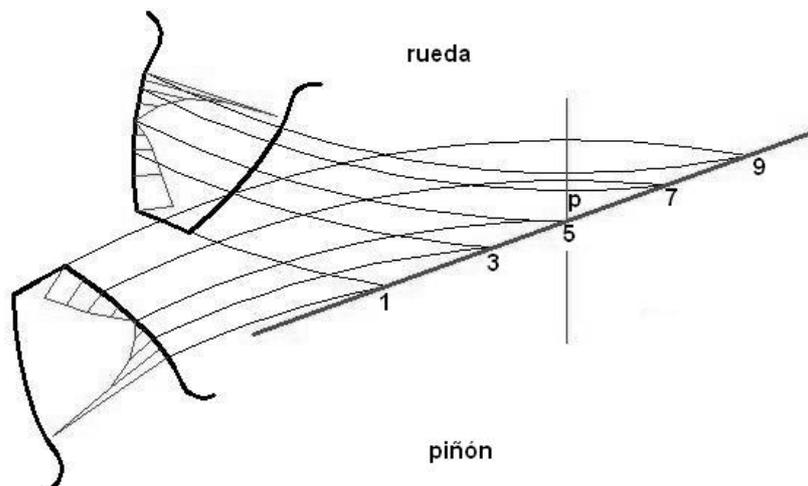


Figura 11. Curvas de desgaste obtenidas para la primera variante, $u_{12}=1$, a partir de las magnitudes $c_1\omega_1$ y $c_2\omega_2$ calculadas

Conclusiones.

1. Las curvas de desgaste que se exponen en la figura 11, muestran que en el engranaje con perfil evolvente, el desgaste de los dientes es irregular debido a que la velocidad de deslizamiento depende de la distancia entre el punto de contacto y el polo de engrane. El mayor desgaste resulta en la parte baja del pie del diente al final de la parte de trabajo del perfil. A medida que el punto de contacto se acerca a la circunferencia primitiva, punto 5, el desgaste del diente disminuye y en la propia circunferencia primitiva se hace cero. Luego el desgaste del diente nuevamente aumenta hasta un valor máximo en la circunferencia de cabeza, lo que se ilustra también en la figura 10. El desgaste mayor de los dientes resulta en el comienzo y final de la línea práctica de engrane, en los puntos 1 y 9, ya que los radios de curvatura en ambos puntos llegan a ser mínimos.
2. En las ruedas normales, el desgaste del diente en la rueda pequeña siempre es mayor que el desgaste del diente en la rueda grande por su relación con la frecuencia con que engranan y desengranan los dientes al tener una velocidad angular mayor.
3. El cambio de dirección del movimiento relativo, cambio de dirección de la velocidad de deslizamiento de un diente respecto al otro, que se repite con frecuencia, en el polo de engrane conduce a una deformación constante del perfil del diente.
4. Para el trazado de las curvas de desgaste de los dientes del piñón y la rueda es adecuado el discretizado propuesto para la línea práctica de engrane (nueve puntos de contacto, incluyendo entre ellos los puntos inicial y final de dicha línea así como el polo de engrane).
5. En las transmisiones con ruedas cilíndricas con dientes rectos y perfil evolvente, normales, el desgaste de los dientes del piñón prácticamente no tiene variación con las relaciones de transmisión analizadas, relaciones de transmisión mayores que cuatro no son recomendables para las mismas.
6. En el caso de los dientes de las ruedas, ocurre una disminución considerable del desgaste con el aumento de la relación de transmisión, resultando, prácticamente similar la magnitud de los deslizamientos específicos, $c_2\omega_2$, al comienzo y al final del engrane cuando la razón de transmisión, $u_{12}= 4$, como se muestra en la tabla 2. En este caso se logra el desgaste mínimo de la transmisión.

Referencias.

1. Baranov, G. G. Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas. Editorial MIR. Moscú. 1979. 574 Pág.
2. Coy, John, Dennis P. Townsend and Erwin V. Zaretsky. Gearing. NASA RP-1152 AVSCOM TR 84-C-15. December 1985.
3. Golubev, Yuri. Teoría de máquinas y mecanismos. Editorial Pueblo y Educación. [La Habana]. 1978. 268 Pág.
4. Hsiang Hsi Lin and Chuen-Huei Liou. A Parametric Study of Spur Gear Dynamics. Final Contractor Report. NASA CR--1998-206598. ARL--CR-419. January 1998.
5. Moya Rodríguez, Jorge Laureano y Rafael Goytisoló Espinosa. Correcciones en las Transmisiones por Engranajes Cilíndricos de Dientes Rectos. 2000. disponible en www.monografia.com.
6. Myszka, David H. Machines and mechanisms: Applied kinematic Analysis. Prentice Hall, Inc, 1999. ISBN: 0-13-597915-3.