TÍTULO:

TÉCNICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Autor: Dr. Reinaldo Hernández Camacho.

Profesor Titular de Matemática.

Doctor en Ciencias Pedagógicas.

Universidad de Matanzas. Cuba.

INTRODUCCIÓN.

La forma de proceder para resolver problemas, ha sido investigada desde épocas remotas por personalidades relevantes en el campo de las ciencias. Así surgió la palabra "Heurística", que inicialmente se refería al estudio de los métodos que conducían a los descubrimientos y las invenciones en sentido general. Actualmente se utiliza esta palabra para referirse al estudio de los principios, medios, reglas y estrategias, que pueden ser utilizados en la resolución de problemas.

Una forma exacta de proceder, que conduzca siempre a la resolución de cualquier tipo de problema, no existe, o al menos no ha sido descubierta hasta el momento. Pero sí se han elaborado indicaciones generales, que permiten guiar en alguna medida, a las personas que estén tratando de resolver un problema. Estas indicaciones están contenidas en lo que se suele llamar elementos heurísticos.

PROBLEMA.

Existen muchas definiciones de problemas y en particular de problemas matemáticos. Para los objetivos de este trabajo interesa trabajar con el concepto de problema en un sentido amplio, aplicable en cualquier disciplina o esfera de la vida, y no solamente en matemática.

Se asumirá la siguiente definición:

DEFINICIÓN: PROBLEMA.

Es una situación que se desea resolver, que se caracteriza por:

-Existe un estado inicial de la situación sin resolver; y un estado final donde se considera resuelta.

-La forma de pasar del estado inicial al estado final (la vía de solución) es desconocida inicialmente por la persona que intenta resolver el problema.

OBSERVACIÓN:

El concepto de problema es relativo. Lo que es un problema para una persona puede que no lo sea para otra persona. Inclusive, lo que es un problema para una persona en un momento dado puede no serlo para esa misma persona posteriormente.

ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA.

Hay variedad en cuanto a las etapas que proponen diferentes autores en la resolución de un problema. No obstante, en la mayoría de las propuestas está presente la que hizo ese admirable pedagogo que se nombró George Polya. En algunos casos se han subdividido algunas de las etapas propuestas por Polya y en otros casos se han hecho ligeras variaciones.

Las etapas que propuso Polya son las siguientes:
1) Comprender el problema.
2) Captar las relaciones que existen entre los diversos elementos. Ver lo que liga la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan.
3) Poner en ejecución el plan.
4) Volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla.

En realidad, lo que suele resultar difícil, en el proceso de resolución de un problema, es hallar la idea que conduzca a obtener la solución del mismo. Polya proponía la formulación de tres preguntas iniciales para tratar de encontrar esa idea:
¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?

LOS ELEMENTOS HEURÍSTICOS.

Los elementos heurísticos pueden clasificarse en medios auxiliares heurísticos y procedimientos heurísticos, y dentro de estos últimos están los principios, las reglas y las estrategias heurísticas.

MEDIOS AUXILIARES HEURÍSTICOS.

Constituyen recursos para representar relaciones entre los datos y la incógnita del problema.
Entre los más importantes se encuentran:

-Las figuras auxiliares ilustrativas o de análisis.
-Las tablas para reflejar relaciones entre datos.
-Gráficos.
-Resúmenes de definiciones, teoremas, propiedades y procedimientos.

LOS PRINCIPIOS HEURÍSTICOS.

Constituyen formas generales de encauzar el proceso de razonamiento durante la resolución de problemas o en la elaboración de nuevos contenidos.
Los más utilizados son:
-La analogía.
-La inducción.
-La reducción.
-La generalización.
-Medir y probar.
-La movilidad.
-Consideración de casos especiales o casos límites.

Para algunos autores los tres primeros son los principios generales y los restantes son principios particulares.

El principio de **analogía** se basa en el establecimiento de semejanzas en el contenido o en la forma entre diferentes objetos o situaciones.

Este principio es, ampliamente, el más usado de todos los principios en la resolución de problemas. Está presente en el proceso de resolución de casi todos los problemas.

Cuando una persona intenta resolver un problema, lo primero que hace es tratar de orientarse en el enunciado del mismo. Ese proceso de orientación suele realizarse a partir de rememorar otros problemas ya resueltos, que tengan algo en común con el problema actual; es decir, tratar de conectar lo nuevo con otras experiencias vividas, tal como se destaca en las concepciones acerca del aprendizaje significativo del profesor Ausubel.

En realidad es muy poco frecuente que se necesite resolver un problema que no tenga relación con ningún otro problema ya conocido. De hecho, cuanto menor sea esa relación mayor suele ser la dificultad para resolver el problema. En los casos excepcionales en que no exista ninguna relación del problema actual con otros problemas conocidos, la persona tiene la necesidad de crear, y tal vez el problema por resolver haya surgido como consecuencia de su actuación en la esfera investigativa.

Una de las principales estrategias que se llevan a cabo para desarrollar habilidades en la resolución de problemas, es la de resolver una gran cantidad y variedad de problemas. Esto permite, posteriormente, la aplicación del principio de analogía. Cuanto mayor sea la variedad de problemas que se conozcan mayores posibilidades existen de aplicar este principio. En ese sentido es elocuente la sugerencia que hacía Polya a la persona que esté tratando de resolver un problema: “Mire bien la incógnita y trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga *la* misma incógnita o una semejante al problema que está tratando de resolver”.

El principio de **inducción** consiste en el análisis de un conjunto de casos particulares, a partir de cuyos resultados se obtienen suposiciones generales.

*El principio de **reducción** consiste en realizar alguna variación en el problema por resolver que permite transformarlo en otro ya conocido.*

En el principio de **generalización** a partir del análisis de un objeto o situación particular o del análisis de un conjunto reducido de objetos o situaciones se obtienen suposiciones generales aplicables a un conjunto más amplio.

(Algunos autores incluyen el principio de inducción y el de generalización en un sólo principio).

El principio de **medir y probar**, como su nombre lo indica, consiste en realizar mediciones en casos particulares para obtener una suposición general.

El principio de **la movilidad** se fundamenta en suponer que un elemento dado puede moverse a diferentes posiciones, para analizar los resultados que se producen durante ese movimiento.
*En el principio de **consideración de casos especiales y casos límites**, dentro de un conjunto de casos posibles, se elige uno, que como consecuencia de sus características particulares, provoca a su vez resultados especiales.*

Durante sus aplicaciones es frecuente que estos principios aparezcan interrelacionados, aunque alguno de ellos predomine en un momento dado.

LAS REGLAS HEURÍSTICAS.

Representan impulsos que provoca el profesor en los estudiantes mediante observaciones, preguntas y recomendaciones, que ayudan a éstos a orientarse en la búsqueda de la solución del problema.

LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS.

Son los sentidos de orientación que pueden seguirse en el razonamiento para conectar los datos con la solución durante el proceso de resolución de un problema.

Aunque algunos autores mencionan también otras, las más usadas son:

-El trabajo hacia adelante o método sintético.
-El trabajo hacia atrás o método analítico.

En el trabajo hacia adelante el razonamiento para obtener la solución parte de los datos y a partir de ellos se busca la vía que conduzca a la solución.

En el trabajo hacia atrás el razonamiento parte de la solución. Se busca un primer resultado intermedio que conduzca a la solución, después un segundo resultado intermedio que conduzca al primero, y así sucesivamente hasta llegar a los datos. Después se puede hacer el recorrido de forma inversa: de los datos a la solución.

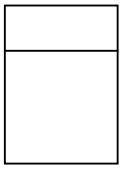
EJEMPLO DE UTILIZACION DE LA ESTRATEGIA DE TRABAJO HACIA ATRÁS EN LA VIDA COTIDIANA.

¿Cómo hacer para traer de un río exactamente 6 litros de agua, si sólo se tienen, para medir el agua, dos recipientes, uno de 4 litros y otro de 9 litros?

SOLUCIÓN.

Se partirá del resultado final (de la solución). Se tratará de obtener un primer resultado intermedio que conduzca a esa solución, después otro resultado que conduzca al primer resultado intermedio, etc.

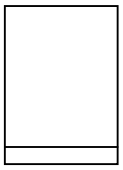
Resultado final (Solución).



6 litros

Fig. 1

Si se llegara al resultado de la figura 2, ya podría resolverse fácilmente el problema. Se vacía este litro en la vasija de a 4, (con lo cual le quedaría a ésta una capacidad de 3 litros), se llena de nuevo la vasija de a 9 y se vacía en la de a 4 hasta llenarla. Así quedarían los 6 litros en la vasija de a 9, como se desea.

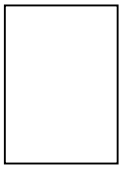


1 litros

Fig.2

Para obtener el resultado de la figura 2, se llena la vasija de 9 litros y se vacía dos veces en la de 4.

9 litros



.

Fig. 3

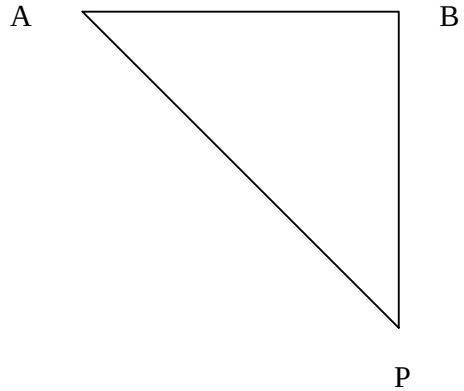
Ahorra es posible ir en sentido inverso.

EJEMPLO DE UTILIZACIÓN DE UNA FIGURA AUXILIAR Y DEL PRINCIPIO DE ANALOGÍA EN GEOGRAFÍA.

La línea imaginaria que une a las ciudades de Ámsterdam y Berlín es paralela a uno de los paralelos terrestres y la línea imaginaria que une a las ciudades de Berlín y Palermo es paralela a uno de los meridianos terrestres. La distancia entre Ámsterdam y Berlín es de 584 Km. y la distancia entre Berlín y Palermo es de 1609 Km. ¿Cuál es la distancia entre Ámsterdam y Palermo?

SOLUCIÓN.

Figura auxiliar, como medio heurístico.



Entre las tres ciudades se forma, aproximadamente, un triángulo rectángulo (asumiendo que las tres ciudades estén en un mismo plano).

Aplicación del principio de analogía :

Por analogía con otros problemas ya resueltos, al conocerse las longitudes de dos de los lados de un triángulo rectángulo, la longitud del tercer lado puede determinarse aplicando el teorema de Pitágoras.

Datos: **Fórmula :**

AB = 584 Km. $(AP)^2 = (AB)^2 + (BP)^2$ (Por el teorema de Pitágoras).

BP = 1609 km $(AP)^2 = (584)^2 + (1609)^2$

AP = ? $AP = \sqrt{(584)^2 + (1609)^2}$

$AP = 1711$

Respuesta:

La distancia entre Ámsterdam y Palermo es de 1711km.

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE GENERALIZACIÓN EN MEDICINA .

La utilización del principio de generalización es de uso frecuente en la medicina. Cuando se crea un nuevo medicamento o un nuevo tratamiento para una enfermedad, es habitual que exista una etapa de prueba. En esa etapa se aplica el medicamento o el tratamiento, de ser posible, primero en animales. Posteriormente, se aplica en grupos reducidos de personas, cuidadosamente seleccionadas y controladas. Una vez que se haya constatado la efectividad del medicamento o tratamiento en esos grupos reducidos de personas, se procede entonces a la generalización de la aplicación en grupos más numerosos de personas que lo necesiten.

EJEMPLO DE APLICCACIÓN DEL PRINCIPIO DE GENERALIZACIÓN EN CIENCIAS SOCIALES.

Es frecuente también la realización de investigaciones en pequeños grupos sociales, con el objetivo de generalizar las experiencias positivas que se obtengan. Por ejemplo, cuando se desean introducir innovaciones en el proceso docente educativo, es habitual que se seleccionen algunos grupos estudiantiles o centros educacionales completos, en los cuales se aplican las innovaciones que se desean valorar. Si los resultados obtenidos son positivos se generaliza la experiencia y se aplican las innovaciones a una masa mayor de estudiantes.

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LA MOVILIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA.

Para que los estudiantes puedan apreciar que en el movimiento de los proyectiles, el tiempo de caída de un proyectil sólo depende de la altura

desde donde este caiga, se puede aplicar el principio de movilidad de la siguiente manera:
Se sitúan dos bolas similares a una misma altura de una superficie que esté lo suficientemente plana y horizontal.
En un mismo instante, una de las bolas se deja caer libremente, y a la otra bola se le da un golpe en dirección horizontal mientras se deja caer también.
La segunda bola describirá una trayectoria parabólica, mientras que la primera caerá en forma rectilínea. No obstante, ambas bolas llegarán a la superficie horizontal en el mismo instante.
El experimento se puede repetir variando la altura y aplicando golpes de diferentes magnitudes a una de las bolas, para observar que el resultado obtenido es el mismo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE REDUCCIÓN A PROBLEMA RESUELTO EN QUÍMICA.

¿Cuántos gramos de cloro y cuántos de sodio se necesitan para preparar 120 gramos de una disolución de agua con sal (Na CL) al 5% de sal ?
(El peso atómico del Na es de 23 U.M.A y el del CL es de 35,5 U.M.A).

SOLUCIÓN.

Si se determina la cantidad de sal necesaria para obtener la disolución, el problema se reduce a un problema ya resuelto.

Datos: **Ecuación:** **Solución:**

Cant. total: 120 gramos $\frac{5}{100} = \frac{x}{120}$ x = $\frac{5.120}{100}$ = 6

Proporción: $\frac{5}{100}$
Cant .de sal: ?

Se necesitan 6 gramos de sal.
Ahora la cantidad de gramos de cloro y de sodio que se necesitan, se obtienen a partir de la fórmula gramo, que se obtiene a su vez, del peso fórmula, lo que conduce a un problema similar a otro ya resuelto.

Na ____ 1 por 23 = 23 U.M.A
Cl ____ 1 por 35,5 = 35,5 U.M.A

Total 58,5 U.M.A

El peso fórmula del NaCl es de 58,5 U.M.A
Entonces la fórmula gramo es de 58,5 gramos, en la que se puede interpretar que contiene 23 gramos de sodio y 35,5 gramos de cloro.

Si se necesitan sólo 6 gramos de sal, la fracción de la fórmula gramo necesaria es $\frac{6}{58,5}$ = 0,102

Entonces:
De sodio se necesitan 0,102 (23) = 2,346 gramos.
De cloro se necesitan 0,102 (35,5) = 3,621 gramos.
Ambas cantidades hacen un total 5,967 gramos, aproximadamente 6 gramos.
(La diferencia es producida por el redondeo en las operaciones).

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN EN GEOGRAFÍA.

Cuando uno de los barcos que habían salido de España, bajo el mando de Magallanes, terminó de darle la vuelta a la tierra, sus tripulantes se sorprendieron al comprobar que el calendario que ellos poseían tenia un día de atraso con respecto al calendario existente en tierra firme española. Esa diferencia se produjo porque los marineros habían estado navegando en sentido inverso al movimiento de rotación de la Tierra y al dar la vuelta completa a nuestro planeta tuvieron un día solar menos que los que transcurrieron en España. Para ellos, cada vez que salía el sol era un día diferente, por lo que contaban sus días por los días solares. Esto trajo como consecuencia que sus días; o sea, los días solares de los navegantes, fueran, como promedio, ligeramente superiores a 24 horas.
¿Es posible encontrar una fórmula que exprese la duración de los días solares de una persona, que le esté dando la vuelta a la Tierra, conociendo la velocidad de rotación de la persona con respecto a la velocidad de rotación de la Tierra; es decir, dando la velocidad de rotación de la persona en comparación con la velocidad de rotación de la Tierra?

SOLUCIÓN:

Para obtener la solución de este problema, se utilizará el principio heurístico de inducción. Se determinará la duración del día solar para algunos casos particulares de velocidades de rotación de la persona y posteriormente, mediante generalización, se obtendrá la fórmula deseada.
Se asumirá como sentido positivo de rotación el mismo que siguieron Magallanes y sus compañeros; o sea, el opuesto al sentido de rotación de la Tierra. Al establecer la comparación entre las velocidades de rotación de la persona y de la Tierra, durante el proceso de obtención de la fórmula, se trabajará con los valores absolutos y no con los signos. Cuando sea necesario, el signo quedará establecido por el sentido de rotación.

CASO PARTICULAR 1.

La persona viaja (idealmente) alrededor de la Tierra con una velocidad de rotación igual a la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso al movimiento de rotación de ésta.

SOLUCIÓN:

La persona se mantiene siempre en el mismo horario solar. Al estar girando con igual velocidad de rotación que la Tierra y en sentido inverso, su posición no cambia con relación al Sol.

No es lógico, entonces, hablar de la duración del día solar, porque en realidad no existe día solar para esa persona. No transita por los diferentes horarios solares.
Demora 1 día de 24 horas en dar la vuelta a la Tierra.

CASO PARTICULAR 2.

La persona viaja alrededor de la Tierra con una velocidad de rotación igual a la mitad de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso.

SOLUCIÓN:

Demora dos días de 24 horas en darle la vuelta a la Tierra, mientras que, para la persona, durante ese tiempo sólo habrá transcurrido un día solar. Sus días solares serán entonces de 48 horas.

CASO PARTICULAR 3.

La persona viaja alrededor de la Tierra con una velocidad de rotación igual a la cuarta parte de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso.

SOLUCIÓN:

Demora 4 días de 24 horas en darle la vuelta a la Tierra.
Cuando la Tierra da una vuelta completa (un día de 24 horas), la persona sólo ha dado $\frac{1}{4}$ de vuelta alrededor de la Tierra y han transcurrido las $\frac{3}{4}$ partes de su día solar (pues sólo se ha retrasado en $\frac{1}{4}$ de vuelta con relación a los puntos fijos sobre la superficie terrestre).
Si se denota por x la duración del día solar, en días de 24 horas, se obtiene que:

$$\frac{3}{4}\,x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{4}{3}$$

La duración de su día solar es de $\frac{4}{3}$ días de 24 horas; o sea, de 32 horas.

CASO PARTICULAR 4.

La persona viaja alrededor de la Tierra con una velocidad de rotación igual a la octava parte de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso.

SOLUCIÓN:

Demora 8 días en dar la vuelta a la Tierra.
Cuando la Tierra da una vuelta completa (un día de 24 horas), la persona ha dado $\frac{1}{8}$ de la vuelta a la Tierra y han transcurrido las $\frac{7}{8}$ partes de su día solar. Entonces, denotando por x la duración de su día solar, en días de 24 horas:

$$\frac{7}{8}\,x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{8}{7}$$

La duración de su día solar es de $\frac{8}{7}$ días de 24 horas, lo que equivale,

aproximadamente, a 27,4 horas.

CASO PARTICULAR 5.

La persona viaja alrededor de la Tierra, con una velocidad de rotación igual a las $\frac{3}{4}$ partes de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso.

SOLUCIÓN:

Demora $\frac{4}{3}$ días de 24 horas en dar la vuelta a la Tierra.

Cuando la Tierra da una vuelta completa (un día de 24 horas), la persona ha dado $\frac{3}{4}$ partes de la vuelta a la Tierra en sentido inverso. Como la velocidad de rotación de la Tierra es mayor en valor absoluto, esto provoca que la persona haya rotado $\frac{1}{4}$ de su día solar en el mismo sentido de rotación de la Tierra.

Si x es el tiempo de duración de su día solar, en días de 24 horas, entonces:

$\frac{1}{4}$ x =1 $\Rightarrow$ x = 4

Sus días solares serán de 4 días de 24 horas.

RESUMEN:

Puede hacerse ahora un resumen de los resultados obtenidos en los casos particulares analizados.

Velocidad de rotación de la persona en sentido inverso al de la rotación de la Tierra.	Tiempo en dar una vuelta a la Tierra, en días de 24 horas.	Duración del día solar, en días de 24 horas.
$\frac{1}{8}$ del valor de la velocidad de rotación de la Tierra.	8 días.	$\frac{8}{7}$ días$\approx$27,4 horas
$\frac{1}{4}$ del valor de la velocidad de rotación de la Tierra.	4 días.	$\frac{4}{3}$ días = 32 horas
$\frac{1}{2}$ del valor de la velocidad de rotación de la Tierra.	2 días	2 días = 48 horas
$\frac{3}{4}$ del valor de la velocidad de rotación de la Tierra.	$\frac{4}{3}$ días	4 días = 96 horas
1 del valor de la velocidad de rotación de	1 día	No hay día solar.

la tierra.		La persona se mantiene en el mismo horario solar.

GENERALIZACIÓN: OBTENCIÓN DE LA FÓRMULA.

Observando los resultados que se reflejan en la tabla anterior, es posible arribar a las siguientes conclusiones:

a) Si se denota por x la cantidad de días que la persona se demora en dar una vuelta a la Tierra, en sentido inverso al movimiento de rotación de ésta, entonces, la velocidad de rotación de la persona será $\frac{1}{x}$ veces el valor absoluto de la velocidad de rotación de la Tierra y sus días solares serán de $\frac{x}{x-1}$ días de 24 horas, con $x \neq 1$.

$$Ts = \frac{x}{x-1}$$

b) Por otra parte, si se denota por x la velocidad de rotación de la persona, en sentido inverso a la velocidad de rotación de la Tierra, los días que demora la persona en dar la vuelta a la Tierra serán de $\frac{1}{x}$ y la duración del día solar será de $\frac{1}{1-x}$ días de 24 horas, con $x \neq 1$. Esto puede obtenerse de la fórmula anterior; es decir, de $\frac{x}{x-1}$, sustituyendo la x por $\frac{1}{x}$.

ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA SOLUCIÓN.

Polya recomendaba que después de obtener la solución de un problema, se hiciera una valoración retrospectiva de la misma. Aquí resulta interesante hacer algunas reflexiones relacionadas con la fórmula obtenida.

1. Sea Ts el tiempo de duración del día solar, en días de 24 horas. Según la primera fórmula: $Ts = \frac{x}{x-1}$ días, siendo x los días que se demora la persona en dar una vuelta a la Tierra en sentido inverso al movimiento de rotación de ésta.

a) Obsérvese que $Ts = \frac{x}{x-1}$ no está definida para x=1, tal como se puso de manifiesto en el análisis del caso particular 1.

b) Si x tiende a 1, pero es diferente de 1, entonces Ts tiende a infinitivo. Es decir, si la velocidad de rotación de la persona esta próxima al valor absoluto de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido contrario, la duración de su día solar se hace muy grande, porque al transcurrir un día de 24 horas, su horario solar varia muy poco.

c) Si x tiende a infinito, Ts tiende a 1. O sea, si la cantidad de días en dar una vuelta a la tierra es muy grande, el día solar es aproximadamente igual

a un día de 24 horas.

Estos resultados son muy ilustrativos para apreciar la aplicación del concepto de límite en situaciones prácticas.

2. Si la velocidad de rotación de la persona fuera el doble en valor absoluto de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso, demoraría $\frac{1}{2}$ día (12 horas) en dar la vuelta a la Tierra. Su día solar sería de 24 horas, pero estaría recorriendo el horario solar en sentido inverso al sentido normal del horario, (sus horas solares irían disminuyendo).
Para este caso la fórmula obtenida anteriormente es válida y daría:

Ts = $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}$ = -1, que puede interpretarse, por el signo negativo del 1, como que el día solar es de 24 horas, pero recorrido en sentido antihorario.

3. Si la velocidad de rotación de la persona fuera igual a la velocidad de rotación de la Tierra y en el mismo sentido que ésta, la persona daría la vuelta a la Tierra en un día de 24 horas y sus días solares serían de 12 horas; es decir, de $\frac{1}{2}$ día.

Para obtener esta solución aplicando la fórmula Ts = $\frac{x}{x-1}$, hay que considerar que x=-1 , porque el sentido de rotación, en este caso, es el opuesto al sentido que se adoptó como positivo en la fórmula.

Entonces, Ts = $\frac{-1}{-1-1}$ = $\frac{-1}{-2}$ = $\frac{1}{2}$ tal como debía ser.

4. Si lo que se conoce es la velocidad lineal de la persona alrededor de la tierra y se quiere determinar la duración de su día solar, es necesario conocer además la dirección y el sentido en el cual se desplaza la persona. Por ejemplo:

a) Si la persona se mueve por la superficie de la tierra o del mar, en la misma dirección de alguno de los paralelos terrestres y en sentido opuesto al de la rotación de la tierra, conociendo la longitud total de ese paralelo en km (ya que no todos los paralelos tienen igual longitud), se puede determinar la cantidad x de días que demora la persona en dar la vuelta a la tierra, dividiendo la longitud total L en km del paralelo entre 24V, siendo V la velocidad lineal en km por hora de la persona.

$$x = \frac{L}{24V}$$

Después de hallar el valor de x se puede determinar la duración del día solar por la fórmula ya conocida:

$$Ts = \frac{x}{x-1}$$

b) Si la persona se desplaza por mar o por tierra en una dirección que no coincide con ninguno de los paralelos terrestres, se puede hallar la componente de su velocidad en km por hora sobre alguno de dichos paralelos y determinar la cantidad x de días que demora la persona en dar la vuelta a la tierra por la fórmula $x = \frac{L}{24V}$, tomando como L la longitud del paralelo seleccionado y como V la componente (la proyección) de la velocidad en km por hora de la persona sobre ese paralelo, la cual tendrá signo negativo si el sentido de esa componente de la velocidad coincide con el de la rotación de la tierra y signo positivo en el caso contrario.

c) Un razonamiento similar al anterior, en lo referente a la proyección de la velocidad de la persona sobre uno de los paralelos terrestres, se puede aplicar si la persona le da la vuelta a la tierra viajando por el aire.

A continuación se presenta un ejemplo en el que se conoce la velocidad lineal de la persona, así como la dirección y el sentido de recorrido.

EJEMPLO:

¿Cuál será la duración del día solar de una persona que le da la vuelta a la tierra siguiendo la dirección de la línea del ecuador y en sentido inverso al de la rotación de la tierra, con una velocidad lineal promedio (por mar y por tierra) de 100 km/h, conociendo que la longitud de la línea del ecuador es aproximadamente de 40054 km?

SOLUCIÓN:

La cantidad de días en darle la vuelta a la tierra es:

$$x = \frac{L}{24V} = \frac{40054}{24.100} = \frac{40054}{2400} \approx 16{,}69$$

La persona se demora, aproximadamente, 16,69 días en darle la vuelta a la tierra.

La duración del día solar es:

$$Ts = \frac{x}{x-1} = \frac{16{,}69}{16{,}69-1} = \frac{16{,}69}{15{,}69} \approx 1{,}0637$$

Los días solares de la persona son, aproximadamente, de 1,0637 días de 24 horas, lo que equivale a 25,5288 horas; o sea, a 25 horas, 31 minutos y 44 segundos.

Obsérvese que si la persona contara los días por los días solares; o sea, por el transcurrir de los días y las noches que en realidad ella percibe, al concluir la vuelta a la tierra tendría un día de atraso con relación al calendario normal. Sus días solares exceden en más de hora y media a las 24 horas de un día normal, por lo que al transcurrir 16,69 días de 24 horas; para la persona habrán transcurrido, aproximadamente, 15,69 días solares de 25,5288 horas.

5. El concorde es un tipo de avión de pasajeros que alcanza una velocidad lineal de unos 2160 km/h. Si este avión volara en sentido inverso al de la rotación de la tierra, siguiendo la dirección de la línea del ecuador y pudiera disponer de suficiente combustible para mantenerse más de 18 horas seguidas volando, podría dar la vuelta a la tierra en menos de un día.
Si volara a ras de la tierra (lo cual es imposible, naturalmente) podría recorrer las 40054 km que mide la línea del ecuador en 18,543 horas, lo que equivale a 18 horas, 32 minutos y 35 segundos.
Si volara a 19 km. de altura sobre el nivel del mar (lo cual es normal en este tipo de avión), siguiendo la dirección de la línea del ecuador, su órbita alrededor de la tierra tendría una longitud de 40173,16 km. y necesitaría 18,598 horas para darle la vuelta a la tierra, lo que equivale a 18 hora, 35 minutos y 53 segundos.
El valor absoluto de la velocidad de rotación de este avión alrededor de la tierra, siguiendo la dirección mencionada, es mayor que la velocidad de rotación de la tierra. Dicho de otra manera: el módulo de la componente de la velocidad lineal del avión sobre la línea del ecuador sería superior al módulo de la velocidad lineal de los puntos fijos sobre la superficie terrestre situados en la línea del ecuador. Como consecuencia de la rotación de la tierra, la velocidad lineal de estos puntos fijos situados sobre la línea de ecuador es de 1668,9 km./h, mientras que la componente sobre la línea del ecuador terrestre de los 2160 km./h de velocidad lineal del avión a 19 km. de altura sobre el nivel del mar es de 2153,67 km./h.
Curiosamente, el horario solar de una persona que viajara en este tipo de avión (en la dirección de la línea del ecuador y en sentido inverso al de la rotación de la tierra), tendría una variación lenta y esa variación sería en sentido antihorario. El avión podría despegar a una hora determinada, mantenerse varias horas volando, y al aterrizar en otro punto bien distante, por el horario solar, que sería la hora normal en ese otro punto, sería más temprano que cuando el avión despegó.

El tiempo en días en dar la vuelta a la tierra sería:

$$x = \frac{L}{24V} = \frac{40054}{24.2153{,}67} = \frac{40054}{51688{,}08} \approx 0{,}7749$$

El avión demoraría 0,7749 días en dar la vuelta a la tierra, lo que equivale, aproximadamente, a 18,598 horas, tal como se había obtenido anteriormente.

La duración del día solar sería: $Ts = \frac{x}{x-1} = \frac{0{,}7749}{0.7749-1} = \frac{0{,}7749}{-0{,}2251}$

$$Ts = -3{,}44$$

El día solar para las personas que viajaran en el avión tendría una duración de 3,44 días de 24 horas y sería recorrido en sentido antihorario; las horas solares irían disminuyendo.
Supóngase que uno de estos aviones despega desde un punto situado sobre la línea del ecuador a las 8 A.M., y le da la vuelta a la tierra siguiendo una velocidad idéntica a la que fue considerada anteriormente; es decir, con igual módulo, igual dirección e igual sentido. ¿Cuándo llegará nuevamente al punto del cual partió?

SOLUCIÓN:

Si se analiza desde el punto de vista de una persona que haya permanecido en tierra firme, cercana al lugar de partida del avión, al transcurrir las 18,6 horas que tarda aproximadamente el avión en dar la vuelta a la tierra, para esa persona serán las 2,6 A.M.; o sea, las 2 horas y 36 minutos A.M. de día siguiente.

Por otra parte, para una persona que viaje en el avión, las horas solares irán disminuyendo a razón de 0,2907 horas solares por cada hora normal de 60 minutos. Entonces, durante las 18,6 horas que dura el vuelo, el horario de esta persona habrá disminuido en 5,4 horas; por lo que llegará a las 2,6 A.M., lo que equivale a las 2 horas y 36 minutos A.M., pero, aparentemente, del mismo día en que partió.

¿En qué radica, realmente, esa diferencia aparente de un día que se produce entre ambos análisis?

En realidad el avión llega a las 2 horas y 36 minutos A.M. del día siguiente al de su partida. Lo que sucede es que, cuando el avión cruza la línea donde se inicia la zona horaria del meridiano de Greenwich, en el calendario terrestre serán 23 horas más tarde que antes de cruzarla, por lo que, a los efectos de dicho calendario, el avión pasará a estar en el día siguiente al de su partida, aún cuando la persona que viaje en el avión tal vez no perciba ese cambio de día.

Para mayor precisión en el análisis anterior resulta conveniente hacer la siguiente aclaración:

Si en los instantes inmediatos anteriores al cruce del avión por la línea donde se inicia la zona horaria del meridiano de Greenwich la hora estuviera entre las 12 A.M. y la 1 A.M., pero sin llegar exactamente a la 1 A.M., entonces, en los instantes inmediatos posteriores a dicho cruce, el avión estaría en el mismo día del calendario en que estaba antes de cruzarlo, pero 23 horas más tarde. En cualquier otro horario que no esté incluido en el intervalo de tiempo anterior, al cruzar la línea mencionada el avión pasará a estar, según el calendario, en el día siguiente al que estaba antes de cruzarlo.

OBSERVACIÓN:

Si el concorde disminuyera su velocidad y mantuviera una velocidad lineal de 1673,88 km/h, volando a 19 km. de altura y en la misma dirección y sentido considerados anteriormente, tendría una velocidad de rotación igual a la de la tierra y en sentido inverso. Se mantendría, entonces, siempre en el mismo horario solar.

BIBLIOGRAFÍA.

-Ballester, S. y otros. .“Metodología de la Enseñanza de la Matemática”. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1992.

-Campistrous, L. Y Rizo, C.: “Aprende a resolver problemas matemáticos”. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1996.

- Hernández, R, "Las funciones didácticas y los procedimientos heurísticos en la enseñanza de la Matemática". Folleto. Universidad de Matanzas, Cuba, 2005.

-Hernández, R.: “Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la

derivada de una función real en un punto". Tesis de doctorado. Matanzas. Cuba. 2000.
-Hernández, R.: "La aplicación de los conceptos matemáticos en la solución de problemas".IV Evento Internacional "La Enseñanza de la Matemática y la Computación". Matanzas. Cuba. 2000.
-Mazarío, I.: "La resolución de problemas en la Matemática I y II de la Carrera de Agronomía". Tesis de doctorado. Matanzas. Cuba. 2002.
-Polya, G.: "¿Cómo plantear y resolver problemas?". Editorial Trillas. C. de México. 1986.
-Santos, L.M.:"La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas". Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.1994.
-Schoenfeld, A.: "Ideas y tendencias en la resolución de problemas". Talleres gráficos EDIPUBLI, S:A: Buenos Aires. 1991.