

Titulo: Predicción autoconsistente generalizada de las propiedades antiplanas de materiales compuestos magneto-electro-elásticos.

Autores: Lic. Aymara Martínez Aragón¹, M.C. Maria del Carmen Rivalta Valladares², Dr. Reinaldo Rodríguez Ramos³.

Institución: Universidad de Matanzas

Dirección postal: Km. 3 ½. Carretera Vía Blanca. Matanzas. Cuba. CP 40100.

e-mail: aymara.martinez@umcc.cu

Resumen

Se propone un modelo trifásico cilíndrico elíptico cofocal magneto-electro-elástico y se obtienen soluciones exactas para el modelo sujeto a un antiplano mecánico, a cargas eléctricas y magnéticas planas en el infinito empleando técnicas matemáticas. Basados en la solución y modelación se emplea un método autoconsistente generalizado para predecir los coeficientes efectivos del compuesto magneto-electro-elástico reforzado por fibras distribuidas y orientadas aleatoriamente con variación en la forma de la fibra. Finalmente, se da una aplicación del método propuesto y se obtienen algunos de los coeficientes y en especial el coeficiente electromagnético efectivo.

1. Introducción

En la ciencia y la tecnología modernas los materiales creados por el hombre han alcanzado un gran interés, entre ellos los compuestos son los más cotizados. Estos materiales presentan ventajas y desventajas con respecto a los materiales naturales, como son, de las primeras: resistencia y rigidez, resistencia a la corrosión, se pueden resaltar o disminuir las propiedades que se desean, menor peso; de las segundas tenemos: complejidad en su confección, costosa manufactura y tecnología avanzada en ocasiones.

Los medios compuestos están formados por distintos materiales pero en conjunto se comportan como un solo material, el adobe por ejemplo, que es un medio compuesto de tierra y paja principalmente; también las columnas de un edificio están formadas por cemento, varillas y grava fundamentalmente.

Para el estudio de estos materiales se busca un modelo matemáticamente equivalente utilizando ciertos métodos, estos arrojan un problema homogenizado y también los coeficientes efectivos, es decir los coeficientes que miden las propiedades del compuesto como si se tratara de un material homogéneo.

¹Universidad de Matanzas. E-mail: amamrp@yahoo.com

²Universidad de La Habana. E-mail: isabel@matcom.uh.cu

³ Universidad de La Habana. E-mail: reinaldo@matcom.uh.cu

Entre los materiales compuestos existe un grupo que recibe el nombre de materiales magneto-electro-elásticos, los cuales están conformados por la combinación de materiales piezoeléctricos y piezomagnéticos. Los compuestos magneto-electro-elásticos tienen la característica de que al aplicárseles un campo eléctrico y/o magnético se deforman o, que al sufrir una deformación producen un campo eléctrico y/o magnético.

En años recientes estos materiales han encontrado una creciente aplicación en estructuras ingenieriles, particularmente en los llamados sistemas de estructuras activas o inteligentes. Esto se debe a que dichos compuestos poseen nuevas propiedades-producto como es el efecto de acoplamiento magnetoeléctrico, el cual no se encuentra en los componentes individuales, es decir, no está presente en los materiales piezoeléctricos ni en los piezomagnéticos. En algunos casos, este efecto de acoplamiento magnetoeléctrico en compuestos piezoeléctricos -piezomagnéticos es obtenido 100 veces más alto que en materiales magnetoeléctricos. Por ejemplo en el compuesto $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ es dos veces más alto que en el de su contraparte Cr_2O_3 .

Consecuentemente estos materiales son extensamente usados como sondas de campo magnético, paquetes eléctricos, acústicos, hidrófonos, lectores de imágenes ultrasónicas médicos, sensores y actuadores con la responsabilidad de la conversión de energía magnetoelectromecánica. Dichos compuestos son referidos además como materiales activos o inteligentes, los cuales pueden realimentar el estado interno de un material o estructura. Por ello se explica que los materiales compuestos por piezoeléctricos y piezomagnéticos sean una rama importante en la emergente tecnología de materiales inteligentes modernos. En particular, su aplicación en sensores magnéticos, puede ser de mucha ayuda en la detección de campos magnéticos de corriente alterna y directa (CA y CD), lo cual los hace potencialmente importantes para el uso en acumuladores magnéticos, dispositivos de lectura-salida y para el blindaje y protección de database.

Los materiales compuestos reforzados con fibras tienen una gran aplicación en la industria espacial, naval, automotriz, la construcción, la medicina, y, en general, en todo campo donde se necesita un óptimo rendimiento del material con el que se trabaje. En todas las aplicaciones, la reducción del peso ha llegado a ser de un 70%, en comparación con los materiales convencionales. El ahorro en peso, unido al costo final del material, al mejoramiento de las propiedades físicas, a la alta resistencia a fracturas, corrosión y temperatura, hacen que estos compuestos sean considerados una excelente alternativa como sustitutos de los materiales convencionales.

La presente investigación tiene como objetivo calcular las propiedades efectivas de un compuesto trifásico magneto-electro-elástico que está sujeto a un antipalano mecánico, a cargas eléctricas y magnéticas planas en el infinito por el uso de un método autoconsistente generalizado. Las inclusiones son cilíndricas-elípticas-cofocales y están aleatoriamente distribuidas.

2. Desarrollo del método.

Las ecuaciones constitutivas que gobiernan la interacción entre los campos eléctricos, magnéticos y elásticos en un medio magneto-electro-elástico en ausencia de fuerzas y de densidad de cargas eléctricas y magnéticas son:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k - f_{kij} H_k \quad (2.1)$$

$$D_i = e_{kij} \varepsilon_{kl} + d_{ik} E_k + g_{ik} H_k \quad (2.2)$$

$$B_i = f_{kij} \varepsilon_{kl} + g_{ik} E_k + \mu_{ik} H_k \quad (2.3)$$

donde C_{ijkl} denota al tensor de rigidez elástica de cuarto orden, e_{kij} es el tensor piezoeléctrico de tercer orden, f_{kij} es el tensor piezomagnético de tercer orden, d_{ik} es el tensor dieléctrico de segundo orden, g_{ik} es el tensor del coeficiente magnetoeléctrico de segundo orden y μ_{ik} es el tensor de permeabilidad magnética de segundo orden del material, σ_{ij} es el tensor de tensiones, D_i es el vector desplazamiento eléctrico, B_i es el vector de densidad de flujo magnético, ε_{kl} es el tensor de deformación, E_k es el campo eléctrico y H_k es el campo magnético. Estamos empleando coordenadas cartesianas rectangulares, con la usual notación para los tensores cartesianos que involucra la sumatoria sobre los índices repetidos. Las componentes del tensor de deformación pueden ser expresadas en términos del vector desplazamiento \vec{u} (cuyas componentes son (u_1, u_2, u_3)), según la teoría de la elasticidad, por la conocida relación geométrica o de Cauchy:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

tomaremos como notación que cuando aparece la coma seguida de un subíndice denota la derivada parcial respecto a ese subíndice. El campo eléctrico \vec{E} es escrito en función del potencial eléctrico por medio de la relación que es consecuencia de la ecuación de Maxwell aplicada a un material magneto-electro-elástico:

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad (2.5)$$

Las componentes del campo magnético \vec{H} son obtenidas en función del potencial magnético por la relación:

$$H_i = -\psi_{,i} \quad (2.6)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$. A estas ecuaciones se les llama ecuaciones gradiente. Las ecuaciones de divergencia son:

$$\text{div } \sigma = 0 \text{ o } \sigma_{ij,i} = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{div } \overset{V}{D} = 0 \text{ o } D_{i,i} = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{div } \overset{V}{B} = 0 \text{ o } B_{i,i} = 0 \quad (2.9)$$

Nuestra investigación está desarrollada para un material transversalmente isotrópico de simetría hexagonal y en el caso de materiales que presentan dicha simetría los tensores elásticos, piezoeléctricos, dieléctricos, piezomagnéticos, magnetoeléctricos y de permeabilidad magnética se simplifican considerablemente.

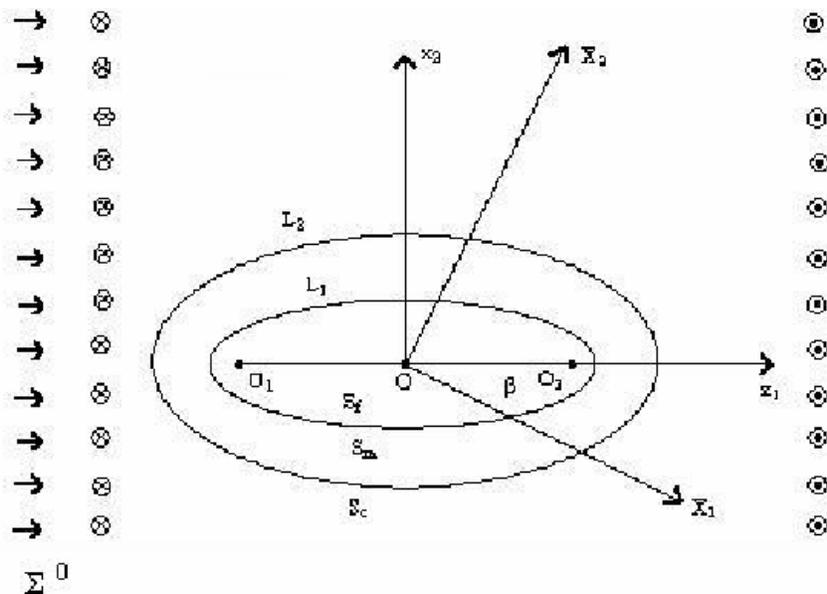


Fig.2.1 Diagrama del modelo trifásico cilíndrico-elíptico-cofocal.

La Fig.2.1 es un diagrama esquemático del modelo trifásico cilíndrico-elíptico-cofocal magneto-electro-elástico. En ella la región elíptica S_f encerrada en L_1 representa la sección de corte de la fibra y la región en forma de anillo elíptico S_m entre L_1 y L_2 representa la matriz en la celda representativa. L_1 y L_2 son elipses de focos comunes O_1 y O_2 . La región infinita fuera de L_2 , S_c , representa el medio equivalente del compuesto magneto-electro-elástico con las propiedades efectivas hasta ahora no conocidas y este es transversalmente isotrópico en un sentido estadístico. Se ha colocado un sistema de coordenadas cartesiano local imaginario $Ox_1x_2x_3$ a lo largo del eje principal común de las elipses cofocales, y el eje x_1 se ha puesto en un ángulo arbitrario β con respecto

al eje X_1 del sistema de coordenadas cartesiano global $OX_1X_2X_3$. El eje x_3 coincide con el eje X_3 . De acuerdo al método autoconsistente generalizado, la fracción volumétrica de la fibra en la celda representativa es igual a la de todo el compuesto, la llamaremos λ y matemáticamente queda:

$$\lambda = \frac{S_f}{S_f + S_m} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \quad (2.10)$$

donde (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son los semiejes mayores y menores de L_1 y L_2 respectivamente. Asumiendo que el compuesto magneto-electro-elástico ha sido polarizado a lo largo del eje x_3 con un plano isotrópico x_1x_2 , y como está sujeto a una cizalladura antiplana, a un campo eléctrico y magnético en el plano, quedan sólo los acoplamientos del desplazamiento fuera del plano, y los campos eléctrico y magnético en el plano, lo cual tiene como consecuencia que se obtengan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= C_{44} \gamma_{13} - e_{15} E_1 - f_{15} H_1, \\ \tau_{23} &= C_{44} \gamma_{23} - e_{15} E_2 - f_{15} H_2, \\ D_1 &= e_{15} \gamma_{13} + d_{11} E_1 + g_{11} H_1, \\ D_2 &= e_{15} \gamma_{23} + d_{11} E_2 + g_{11} H_2, \\ B_1 &= f_{15} \gamma_{13} + g_{11} E_1 + \mu_{11} H_1, \\ B_2 &= f_{15} \gamma_{23} + g_{11} E_2 + \mu_{11} H_2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donde $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. A estas ecuaciones se les llaman las ecuaciones del problema en una cizalladura antiplana o de un problema antiplano que es la clase de problema que vamos a resolver en este trabajo.

Las ecuaciones de equilibrio, de carga y de flujo se reducen a las ecuaciones Armónicas

$$\nabla^2 u_3 = 0 \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.12)$$

donde ∇^2 es el operador de Laplace $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. En la resolución de

estos problemas homogéneos de fibras es conveniente tratar las variables elásticas, eléctricas y magnéticas de la misma forma. Siguiendo un trabajo de Barnett and Lothe (1975) introduciremos los vectores columnas de los desplazamientos, deformaciones y tensiones generalizadas:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_3 \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_{k3} \\ \mathbf{D}_k \\ \mathbf{B}_k \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_{k3} \\ \mathbf{E}_k \\ \mathbf{H}_k \end{pmatrix} \quad k = 1,2 \quad (2.13)$$

Escribamos las ecuaciones (2.11) de la forma siguiente:

$$\Sigma_k = \mathbf{M}\mathbf{Z}_k \quad k = 1,2 \quad (2.14)$$

Llamaremos a la matriz \mathbf{M} de los módulos efectivos.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{44} & \mathbf{e}_{15} & \mathbf{f}_{15} \\ \mathbf{e}_{15} & -\mathbf{d}_{11} & -\mathbf{g}_{11} \\ \mathbf{f}_{15} & -\mathbf{g}_{11} & -\mu_{11} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Además, las ecuaciones (2.12) se transforman en:

$$\nabla^2 \mathbf{U} = 0 \quad (2.16)$$

Introduzcamos el siguiente vector para facilitar el análisis posterior del problema:

$$\mathbf{T} = -\int_A^B (\Sigma_2 dx_1 - \Sigma_1 dx_2) \quad (2.17)$$

donde A es un punto fijo, B es un punto en movimiento y la trayectoria AB no atraviesa la interfase entre fases adyacentes. Asumiendo que hay una perfecta conexión entre fases adyacentes del modelo quedan las siguientes condiciones de continuidad:

$$\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_m \quad \mathbf{T}_f = \mathbf{T}_m \quad (2.18)$$

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_c \quad \mathbf{T}_m = \mathbf{T}_c \quad (2.19)$$

donde f , m y c representan la fibra, la matriz y el compuesto, respectivamente, en la celda representativa.

La condición de autoconsistencia se puede expresar como sigue:

$$\Sigma_{lg}^\infty = \Sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{B}^0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Por la hipótesis de medio continuo y de la suposición de la existencia de una dimensión característica de inhomogeneidad el material puede ser considerado como un medio globalmente homogéneo y el problema de contorno sobre el cuerpo puede ser resuelto usando propiedades promediadas. Es decir, se puede plantear el campo promedio en las coordenadas globales quedando:

$$\tilde{\Sigma}_{1g} = M_c \tilde{Z}_{1g} \quad (2.21)$$

donde el subíndice 1g denota la dirección X_1 en las coordenadas globales, la \sim denota promedio y M_c es la matriz efectiva. Siguiendo el procedimiento del método autoconsistente generalizado la ecuación anterior se puede escribir:

$$\tilde{\Sigma}_{1g} = \lambda(\tilde{\Sigma}_{1g})_f + (1 - \lambda)(\tilde{\Sigma}_{1g})_m \quad (2.22)$$

Es importante notar que la tensión generalizada en el sistema de coordenadas globales depende del ángulo de orientación β , podemos promediar tomando la región bajo estas consideraciones, lo cual es tan bueno como en la orientación β , la cual sigue una distribución uniforme, estadísticamente hablando, lo cual se traduce en:

$$\tilde{\Sigma}_{1g} = \frac{1}{\pi S} \int_0^\pi \int_S \Sigma_{1g} dS d\beta \quad (2.23)$$

S es el área de la región bajo las consideraciones.

Sustituyendo (2.21) y (2.23) en (2.22) obtenemos la ecuación:

$$\lambda(\tilde{\Sigma}_{1g})_f + (1 - \lambda)(\tilde{\Sigma}_{1g})_m = M_c \left[\lambda M_f^{-1} (\tilde{\Sigma}_{1g})_f + (1 - \lambda) M_m^{-1} (\tilde{\Sigma}_{1g})_m \right] \quad (2.24)$$

Esta ecuación nos permite el cálculo de M_c , que es la matriz de los coeficientes efectivos y es el objetivo de nuestra investigación, la tensión generalizada en el sistema de coordenadas globales se puede determinar en función del sistema de coordenadas locales. Por tanto, el problema ahora se reduce a determinar una expresión para el campo de tensión generalizada en el sistema de coordenadas locales. Empleando teoría de variable compleja, funciones armónicas, representaciones conformes, desarrollos en serie de Laurent y potenciales complejos llegamos a las siguientes expresiones para los campos de tensión generalizada en el sistema de coordenadas locales.

$$(\Sigma_1 - i \Sigma_2)_f = M_f (Q_1 \cos \beta + i Q_2 \text{sen} \beta) \Sigma^0 \quad (2.25)$$

$$(\Sigma_1 - i\Sigma_2)_m = M_m \frac{\left[(Q_3 - \frac{Q_5}{\zeta^2}) \cos \beta + i \left(Q_4 - \frac{Q_6}{\zeta^2} \right) \text{sen} \beta \right] \Sigma^0}{\left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)} \quad (2.26)$$

$$Q_1 = 4[(\rho_1^2 + 1) \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) M_c + (\rho_1^2 - 1) \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) M_f + (\rho_1^2 + 1) \times$$

y

$$\left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) M_m + (\rho_1^2 - 1) \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) M_c M_m^{-1} M_f]^{-1} \quad (2.27)$$

$$Q_2 = 4[(\rho_1^2 - 1) \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) M_c + (\rho_1^2 + 1) \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) M_f + (\rho_1^2 - 1) \times$$

$$\left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) M_m + (\rho_1^2 + 1) \left(-\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) M_c M_m^{-1} M_f]^{-1} \quad (2.28)$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} [(I + M_m^{-1} M_f) + \frac{1}{\rho_1^2} (I - M_m^{-1} M_f)] Q_1 \quad (2.29)$$

$$Q_4 = \frac{1}{2} [(I + M_m^{-1} M_f) - \frac{1}{\rho_1^2} (I - M_m^{-1} M_f)] Q_2 \quad (2.30)$$

$$Q_5 = \frac{1}{2} [(I + M_m^{-1} M_f) + \rho_1^2 (I - M_m^{-1} M_f)] Q_1 \quad (2.31)$$

$$Q_6 = \frac{1}{2} [(I + M_m^{-1} M_f) - \rho_1^2 (I - M_m^{-1} M_f)] Q_2 \quad (2.32)$$

$$\rho_1^2 = \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \quad \rho_2^2 = \frac{4\delta + \sqrt{16\delta^2 + \lambda^2(1 - \delta^2)^2}}{2\lambda(1 - \delta^2)} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{b_1}{a_1}$$

Refiriéndonos a la Fig.2.1, la tensión generalizada en el sistema de coordenadas globales, $(\Sigma_{1g} - i\Sigma_{2g})$, se relaciona con $(\Sigma_1 - i\Sigma_2)$ en el sistema de coordenadas locales por:

$$(\Sigma_{1g} - i\Sigma_{2g}) = (\Sigma_1 - i\Sigma_2) e^{-i\beta}$$

Usando la ecuación (2.23) en el plano complejo ζ tenemos que:

$$\left(\tilde{\Sigma}_{1g} - i\tilde{\Sigma}_{2g}\right)_f = \frac{1}{\pi S_f} \int_0^\pi \int_0^{2\pi\rho_1} \int_0^\pi (\Sigma_1 - i\Sigma_2) e^{-i\beta} J d\rho d\theta d\beta \quad (2.33)$$

$$\left(\tilde{\Sigma}_{1g} - i\tilde{\Sigma}_{2g}\right)_m = \frac{1}{\pi S_m} \int_0^\pi \int_0^{2\pi\rho_2} \int_0^\pi (\Sigma_1 - i\Sigma_2) e^{-i\beta} J d\rho d\theta d\beta \quad (2.34)$$

donde $J = \rho + \frac{1}{\rho^3} - 2\cos 2\theta \frac{1}{\rho}$.

Sustituyendo las ecuaciones (2.25) y (2.26) en las ecuaciones anteriores, respectivamente, vemos que la triple integral es no acoplada y podemos obtener fácilmente la solución:

$$\left(\tilde{\Sigma}_{1g} - i\tilde{\Sigma}_{2g}\right)_f = \frac{1}{2} M_f (Q_1 + Q_2) \Sigma^0 \quad (2.34)$$

$$\left(\tilde{\Sigma}_{1g} - i\tilde{\Sigma}_{2g}\right)_m = \frac{1}{2} M_m \frac{(\rho_1^2 \rho_2^2 (Q_3 + Q_4) + (Q_5 + Q_6))}{\rho_1^2 \rho_2^2 + 1} \Sigma^0 \quad (2.35)$$

En estas ecuaciones vemos que $\left(\tilde{\Sigma}_{2g}\right)_f$ y $\left(\tilde{\Sigma}_{2g}\right)_m$ son nulas bajo el campo de la tensión generalizada uniforme Σ^0 . Las ecuaciones anteriores nos dan una expresión para los campos de tensión generalizada en las coordenadas globales a partir de las expresiones halladas anteriormente en el sistema de coordenadas locales, ahora sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.24) podemos obtener la ecuación para determinar la matriz que predice los módulos efectivos por el método autoconsistente generalizado:

$$M_c = \left[\lambda M_f (Q_1 + Q_2) + (1 - \lambda) M_m \frac{(\rho_1^2 \rho_2^2 (Q_3 + Q_4) + (Q_5 + Q_6))}{\rho_1^2 \rho_2^2 + 1} \right] \times \left[\lambda (Q_1 + Q_2) + (1 - \lambda) \frac{(\rho_1^2 \rho_2^2 (Q_3 + Q_4) + (Q_5 + Q_6))}{\rho_1^2 \rho_2^2 + 1} \right]^{-1} \quad (2.36)$$

En las ecuaciones (2.27)-(2.32) se puede ver que está contenida la matriz de los módulos efectivos, por esta razón la ecuación (2.36) es una ecuación implícita, por lo que hay que usar un método iterativo para resolverlo. Como valor inicial de la iteración se tomará la aproximación de Voigt:

$$M_c = \lambda M_f + (1 - \lambda) M_m$$

Esta aproximación es quizás el modelo más simple para la evaluación de las propiedades efectivas de materiales compuestos.

3. Resultados numéricos.

Ha sido confeccionado un software del método autoconsistente generalizado y obtenido las propiedades efectivas antiplanas. Dicha implementación, partiendo de las propiedades de los componentes, permite determinar dado el radio aspecto las propiedades efectivas para la fracción volumétrica de 0 a 1; también dada la fracción volumétrica obtiene las propiedades efectivas para el radio aspecto de 0 a 1.

Hallemos algunas propiedades del compuesto formado por $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$.

	C_{44} (GPa)	e_{15} (Cm^{-2})	d_{11} ($*10^{-9}\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$)	f_{15} ($\text{NA}^{-1}\text{m}^{-1}$)	μ_{11} ($*10^{-6}\text{Ns}^2\text{C}^{-2}$)
BaTiO_3	43	11,6	11,2	0	5
CoFe_2O_4	45,3	0	0,08	550	-590

Nótese que en ambos materiales el coeficiente electromagnético, $g_{11}=0$.

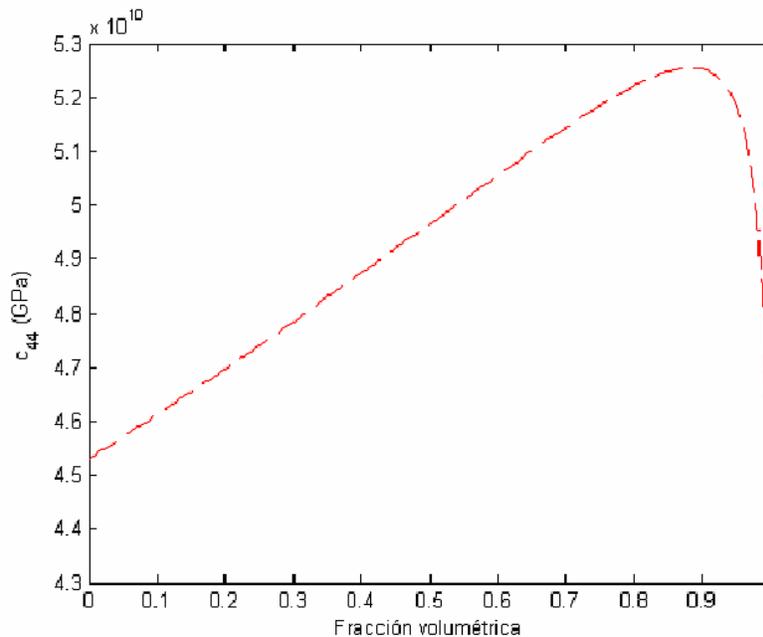


Fig. 3.1 Coeficiente elástico contra fracción volumétrica con radio aspecto $\delta = 0.6$.

En esta gráfica vemos que para una fracción volumétrica entre 0.8 y 0.9 es donde el compuesto tiene más elasticidad y por tanto más resistencia a las fracturas. Veamos ahora la gráfica del coeficiente electromagnético.

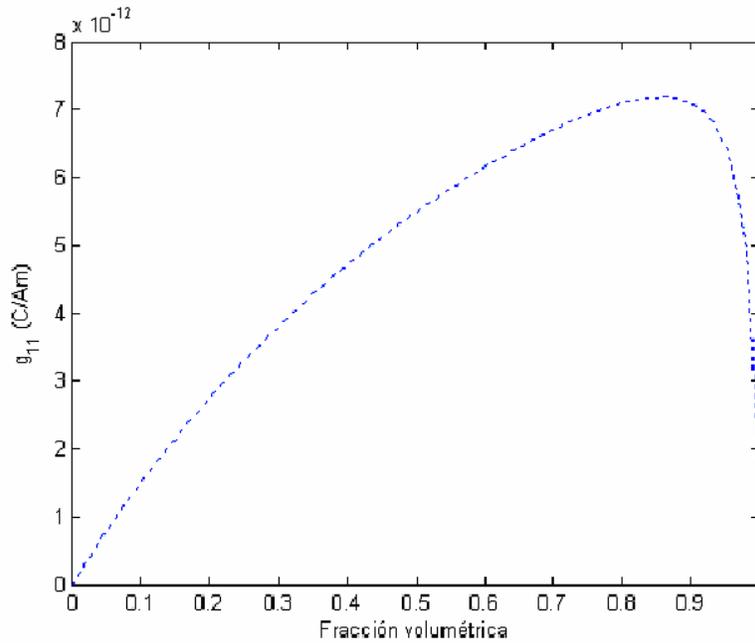


Fig. 3.2 Coeficiente electromagnético contra fracción volumétrica con radio aspecto $\delta = 0.6$.

En esta gráfica podemos apreciar que también cuando la fracción volumétrica está entre 0.8 y 0.9 es donde alcanza el máximo este coeficiente por lo que se puede lograr un compuesto con las propiedades elásticas y electromagnéticas máximas a la vez. Ahora sin embargo en esta fracción volumétrica se afectaría el coeficiente piezomagnético como se observa en la siguiente gráfica.

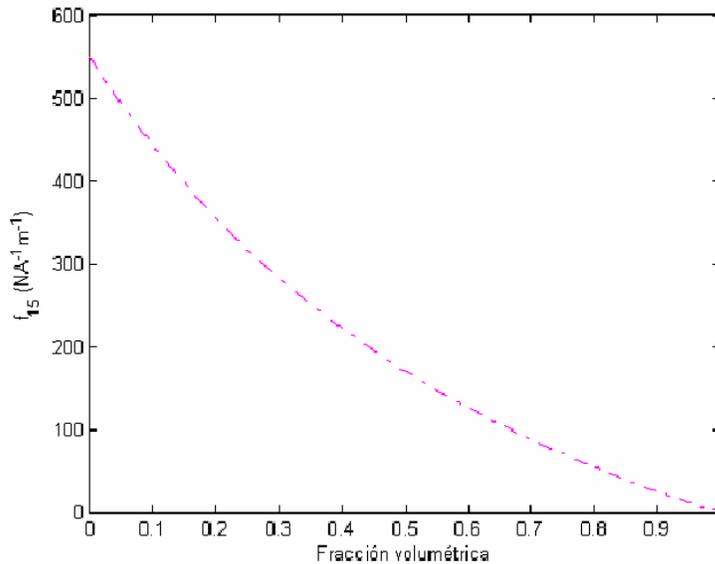


Fig. 3.3 Coeficiente piezomagnético contra fracción volumétrica con radio aspecto $\delta = 0.6$.

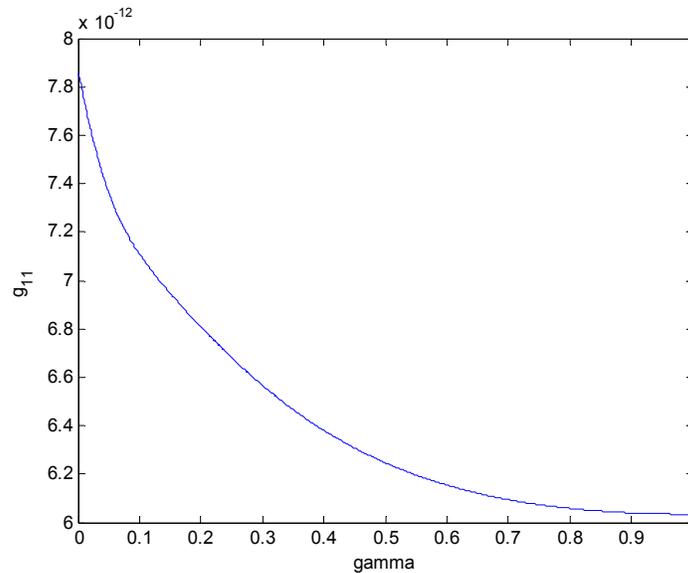


Fig. 3.4 Coeficiente electromagnético contra radio aspecto con fracción volumétrica $\lambda = 0.6$.

En esta gráfica ejemplificamos como trabaja el software introduciéndole la fracción volumétrica y determinando la importante propiedad electromagnética contra el radio aspecto lo cual nos permite determinar con esa fracción para que radio aspecto la propiedad es máxima o mínima.

4. Conclusiones.

Un modelo trifásico cilíndrico elíptico cofocal a sido propuesto para materiales magneto-electro-elásticos. Los coeficientes efectivos antiplanos de dichos materiales han sido determinados por el método autoconsistente generalizado para el antiplano mecánico y cargas eléctricas y magnéticas en el plano. Entre estos coeficientes el relevante coeficiente electromagnético por el cual estos materiales han encontrado múltiples aplicaciones en la industria y la tecnología. Los coeficientes efectivos dependen de los coeficientes elásticos, piezoeléctricos, piezomagnéticos, dieléctricos y de permeabilidad magnética de las fases del compuesto.

Son mostrados resultados numéricos para el compuesto $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$ y analizados los resultados para radio aspecto fijo y fracción volumétrica variando entre 0 y 1.

Actualmente trabajamos en la validación por otros métodos y en la confección de un método autoconsistente generalizado para las propiedades efectivas planas.

Referencias

Barnet, D.M., Lothe, J., Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators. *Phys. Stat. Sol. (b)* 67, 105-111.

Jiang, C.P., Tong, Z.H., Cheung, Y.K., 2001, A generalized self-consistent method for piezoelectric fiber reinforced composites under antiplane shear, *Mechanics of materials*, 33, 295-308.

Rodríguez Ramos, R., Otero Hernández, J.A., Bravo Castillero, J., Rivalta Valladares, M.C., 1995, Vibraciones torsionales de un cilindro piezoeléctrico, *Revista mexicana de Física* 41, No. 6, 865-874.

Aboudi, J., 1991, A unified micromechanical approach.

Aboudi, J., 2001, Micromechanical analysis of fully coupled electro-magneto-elastic multiphase composite, *Smart Materials and Structures*, 10, 867-877.

Wang, X., Shen, Y., 2003, Inclusions of arbitrary shape in magneto-electroelastic composite materials, *International Journal of Engineering Science*, 41, 85-102.

Levin, V.M., 1999, The self-consistent methods in mechanics of composite materials.

Martínez Aragón, A., 2004, Análisis autoconsistente generalizado de un material compuesto magneto-electro-elástico.