

Título: “LOS ELEMENTOS HEURÍSTICOS.”

Autora: Marilú Jorge Martín

Departamento de Matemática, Facultad de Informática, Universidad de
Matanzas "Camilo Cienfuegos"

Introducción:

La enseñanza de la Matemática en nuestro país cada vez se perfecciona más y muchos son los profesores que desarrollan sus clases siguiendo el **método heurístico**, que bien pudiera caracterizarse “como el método mediante el cual la actividad del profesor consiste en conducir al alumno a hallar por sí mismo el conocimiento que se desea que adquiera; el papel del maestro en este método es estimular al alumno al pensamiento reflexivo, guiarlo para que indague e investigue, para que llegue a conclusiones”. (Torres, 1986, p.115)

Una prioridad que tiene la enseñanza de la Matemática, es la de contribuir a la formación y desarrollo del pensamiento lógico en nuestros estudiantes; de ahí que se trabaje en tres direcciones fundamentales, que son: desarrollo del pensamiento lógico, resolución de problemas y vinculación con la vida; de forma tal que permita a los alumnos, no solo poder enfrentarse a la solución de problemas matemáticos, sino también, la de pensar de forma correcta ante la solución de cualquier tipo de problema que en la vida cotidiana enfrentan.

En la actualidad, se reconoce a la Instrucción Heurística como una de las más importantes tendencias relacionadas con el desarrollo del pensamiento. En esta comunicación se muestra de forma breve cómo podemos utilizar la **Heurística** como método para la enseñanza de los procedimientos lógicos del pensamiento, en particular, mostramos algunos ejemplos del uso de los elementos heurísticos en las clases de Matemática.

Desarrollo:

Los autores consultados clasifican los **elementos heurísticos** en dos categorías: **procedimientos heurísticos y medios auxiliares heurísticos**.

Según H. Müller los **procedimientos heurísticos** son formas de trabajo y de pensamientos que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes. La introducción de estos procedimientos en la clase y su aplicación por parte de los alumnos propicia la asimilación de los conocimientos, su capacidad para resolver problemas para los cuales no existen procedimientos algorítmicos y el desarrollo del pensamiento creador.

Los **procedimientos heurísticos** pueden dividirse en:

- principios heurísticos
- reglas heurísticas
- estrategias heurísticas

Los principios heurísticos: Son de gran utilidad para la búsqueda de nuevos conocimientos y para su fundamentación, también sugieren ideas para la solución de diferentes problemas.,

Los más utilizados son:

- La analogía.

- Inducción incompleta.
- La generalización.
- Medir y probar.
- Principio de la movilidad.
- Consideración de casos especiales o casos límites.
- Reducción a problemas ya resueltos.

Las reglas heurísticas: Representan impulsos que provoca el profesor en los estudiantes mediante observaciones, preguntas y recomendaciones, que ayudan a éstos a orientarse en la búsqueda de la solución del problema.

Las estrategias heurísticas: Son los sentidos de orientación que pueden seguirse en el razonamiento para conectar los datos con la solución durante el proceso de resolución de un problema.

Las más usadas son:

- El trabajo hacia adelante o método sintético.
- El trabajo hacia atrás o método analítico.

Los medios auxiliares heurísticos son recursos que apoyan el análisis, la reflexión y el razonamiento en la realización de actividades mentales exigentes, o sea, ayudan a hacer más racional el trabajo mental.

Entre los más importantes se encuentran:

- Las figuras auxiliares ilustrativas o de análisis.
- Las tablas para reflejar relaciones entre datos.
- Gráficos.
- Resúmenes de definiciones, teoremas, propiedades y procedimientos.

Hasta aquí un breve resumen sobre los **elementos heurísticos** según el parecer de los autores consultados.

Los principios Heurísticos.

A continuación mostramos algunos ejemplos de cómo es posible aplicar los **principios heurísticos** en las clases de Matemática.

1. Medir y probar.

Este proceder inductivo se emplea también en la búsqueda de suposiciones. Aparece muy frecuentemente asociado al principio de movilidad. O sea, se mide y prueba, o se mide y compara, después de haber ejecutado variaciones mediante la movilidad.

- Como motivación para la clase de los problemas de optimización de funciones de una variable real, podemos entregarles a 6 estudiantes del grupo un cordel de 60 cms y plantear la siguiente situación:

- a) Formar un rectángulo con el cordel.
- b) Calcular el área de la superficie plana que limita dicho cordel.
- c) Llevar a la próxima clase el resultado obtenido por cada uno.

Después de mostrarse el resultado obtenido por cada alumno, destacaremos que las áreas no son iguales, y la pregunta que lanzamos al

grupo es: **¿qué longitud deberá tener cada lado del rectángulo para que el área sea máxima?**

Con esto motivamos la clase e introducimos el nuevo contenido.

2. Analogía

Consiste en un recurso de búsqueda de la idea principal de solución sobre la base de la utilización de semejanzas de forma o de contenido entre los elementos matemáticos.

Este principio puede aplicarse para que los alumnos obtengan una proposición nueva para ellos, y la formulen guiados por el profesor mediante impulsos. Por ejemplo:

- La definición de 0 - sucesión puede obtenerse de forma análoga a como se define la sucesión convergente de límite finito distinto de cero.
- También se emplea para demostrar y obtener las diferentes caracterizaciones para las sucesiones convergentes.
- Elaborando las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Este es un ejemplo tomado del artículo "Las formas de trabajo y de pensamiento matemático en la enseñanza de la Matemática", p.4 del profesor Hilario Santana de Armas, del ISPEJV, de Ciudad de la Habana. Veamos:

Podríamos iniciar la motivación analizando que en un triángulo rectángulo se determina un lado conociendo los otros dos aplicando el Teorema de Pitágoras; así mismo, dados dos ángulos de un triángulo cualquiera se calcula el tercer ángulo utilizando la propiedad de la suma de los ángulos interiores.

Por analogía, concluimos que conocidos dos elementos podemos determinar el tercero.

Si variarnos las condiciones, se arriba al problema: en un triángulo rectángulo ¿podría hallarse la longitud de un lado conocidos otro lado y un ángulo agudo? o ¿calcular la amplitud de un ángulo conocidos dos lados?

Para resolverlo hay que buscar relaciones entre un ángulo agudo y dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo. Sea el triángulo ABC, rectángulo en C.

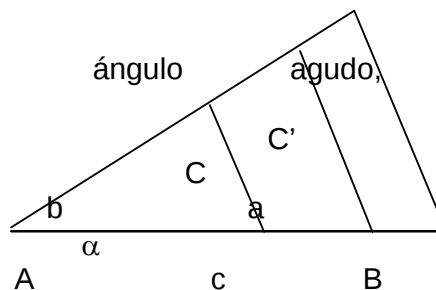
Si formamos otros triángulos rectángulos con el mismo ángulo agudo α ¿cambiará la razón entre sus lados homólogos? y si variarnos la amplitud del

C"

¿Qué ocurriría con esta razón?

De este análisis se desprende que la razón entre los lados no depende de las longitudes de los lados del triángulo, pero sí de la amplitud del ángulo agudo.

B' B"



Se pide a los alumnos que formen las razones entre las longitudes de los lados y se introducen las definiciones y notaciones de cada constante

correspondientes a las razones trigonométricas del ángulo seleccionado ($\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{cos} \alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tan} \alpha = \frac{a}{b}$, etc.).

3. Generalización

Permite obtener suposiciones para un conjunto de objetos, fenómenos o relaciones, a partir del análisis de un caso especial o particular. (Como se procede de forma inductiva, habrá que demostrar la validez de las suposiciones así obtenidas, al igual que en el caso del resto de los principios heurísticos).

- En el tema de la derivación de funciones de varias variables, después de definir función compuesta de varias variables se impone la pregunta: ¿se podrá aplicar la regla de la cadena ya conocida? La respuesta es afirmativa. A través de un ejemplo podemos generalizar la regla de la cadena auxiliándonos de un esquema que relaciona la dependencia entre las variables (el llamado árbol de dependencia).

Veamos:

El estudiante sabe que si $y = f(u)$ con $u = g(x)$ esquema: $y \rightarrow u \rightarrow x$

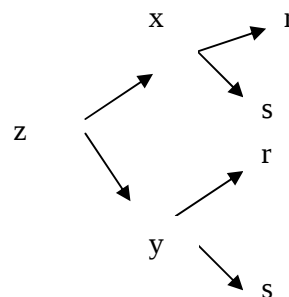
Entonces: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Luego para las funciones de varias variables:

Si $z = f(x, y)$ con $x = g(r, s)$

$$y = h(r, s)$$

Se cumple: $\frac{dz}{dr} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dr} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dr}$



4. Movilidad

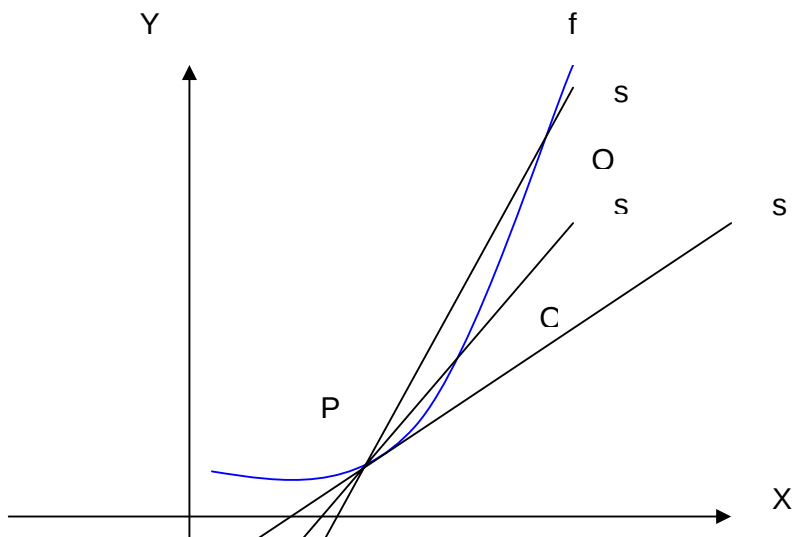
Consiste en suponer que, en figuras o cuerpos geométricos, un elemento es movable y, a partir de ello, analizar los cambios que se producen, con el objetivo de encontrar relaciones y formular las suposiciones correspondientes. Veamos:

Ejemplo 1.

Para obtener suposiciones sobre las relaciones entre ángulos en la circunferencia se mueven los vértices de ángulos inscritos. Por ejemplo, para llegar al resultado: “*los ángulos inscritos sobre una misma cuerda son iguales*”, se traza una circunferencia y una cuerda $\overline{AB}$, se sitúan dos puntos C y D de la circunferencia, se trazan los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DB}$ y se mide la amplitud de los ángulos ACB y ADB. Más tarde se mueven los puntos C y D por la circunferencia y se miden las amplitudes de los ángulos que se forman.

Ejemplo 2.

Al introducir el concepto de derivada de una función real de una variable real en un punto, planteamos el problema de la determinación de la recta tangente a una curva en un punto de esta: Sea s la *recta secante* a la curva f, que pasa por los puntos P y Q de f. Al aproximar el punto Q al punto P manteniendo el primero sobre la curva f, la recta secante irá variando su posición y de este modo, si al hacer “tender” el punto Q hacia el punto P la recta secante “tiende” hacia la posición de cierta recta dada, esta última recibe el nombre de *recta tangente* en P a la curva f.



5. Consideración de casos especiales o casos límites.

Es útil para establecer relaciones entre los conocimientos nuevos y los ya adquiridos, y permite también, a partir de dichas consideraciones, llegar a obtener nuevos conocimientos. Veamos:

1. Una de las reglas de derivación, plantea que si f y g son funciones derivables en x , entonces $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$. Una vez que el estudiante conoce la regla, se le puede preguntar: ¿qué resultado se obtendrá si $f(x) = c$ donde c es una constante? Indudablemente el alumno llega a: $(c.g(x))' = c.g'(x)$.

2. La ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, representa un elipsoide en

$\mathbb{R}^3$ centrado en el origen e interceptos con los ejes en a , b y c . Podemos preguntar: ¿Qué fórmula se obtiene si sucede que $a = b = c$? ¿Qué lugar geométrico ocupa en el espacio? El estudiante con seguridad llega a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y al darse cuenta de que los interceptos con los ejes son iguales concluye que es una esfera.

6. Inducción incompleta.

Se define como el recurso de búsqueda de la idea principal de la solución que se concreta mediante la generalización de una relación a partir del análisis de varios casos particulares, es decir, llegar a la suposición de que existe una relación general, a partir del análisis de una serie de resultados particulares. (Se hace una generalización empírica). Veamos:

- Dadas las sucesiones:

1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,... se puede, analizando la composición de cada término, y el valor correspondiente, llegar a establecer la relación general:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

$$1+2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{2 \cdot (2+1)}{2}$$

$$1+2+3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{3 \cdot (3+1)}{2}$$

$$1+2+3+4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{4 \cdot (4+1)}{2}$$

De la observación de estos resultados particulares se induce que la suma de los primeros n números naturales es $1+2+3+4+5+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

(Procedimiento sugerido por Gauss, en su infancia)

7. Reducción a problemas ya resueltos.

Esta interpretación del principio de reducción es la más conocida, con su ayuda puede resolverse un problema para el cual no se conoce la vía de solución; es un recurso de búsqueda de la idea principal de solución que se desarrolla sobre la base de la transformación de lo desconocido en conocido.

En el estudio de la Matemática para las Ciencias Económicas, se plantea que se produce un **equilibrio de mercado** cuando la cantidad demandada por el consumidor se iguala a la cantidad ofertada por el productor. El punto donde esto ocurre recibe el nombre de **punto de equilibrio**. Dada la cantidad demandada y la ofertada se pide al alumno encontrar el punto donde se produce dicho equilibrio. Como estas cantidades se expresan a través de funciones, entonces el punto de equilibrio buscado no es más que el punto de intersección entre las dos funciones, el cual es un problema bien conocido por los estudiantes. El problema pudiera expresarse así:

- Sean las funciones de oferta y demanda de un artículo las siguientes:

$p(x) = 3 - x$, $p(x) = x^2 + 1$, donde p es el precio en pesos y x son las unidades.

- a) Determina gráfica y analíticamente el punto de equilibrio de mercado e interprete el resultado.

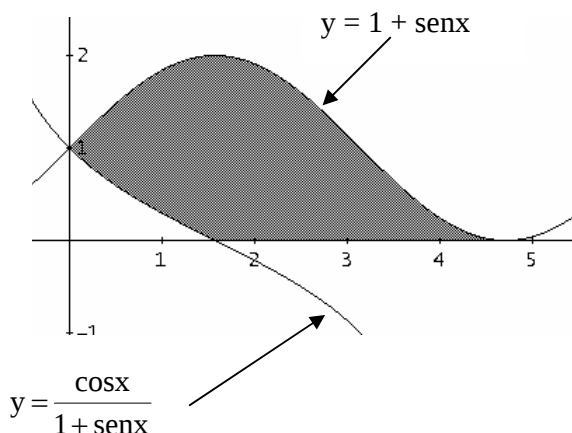
Los medios auxiliares heurísticos.

A continuación mostramos algunos ejemplos de cómo es posible utilizar los **medios auxiliares heurísticos** en las clases de Matemática.

1. Las **figuras ilustrativas o de análisis** se utilizan en problemas geométricos y no geométricos. Constituyen medios auxiliares heurísticos que ayudan al análisis de la situación y permiten a partir de la información que aportan, establecer relaciones y dependencias que nos acercan a la solución del problema planteado.

Un ejemplo de ello es el siguiente ejercicio que podemos pedir al alumno en el tema de las integrales definidas y sus aplicaciones:

- Determina el área de la región sombreada.



A través de la figura nos informamos de las curvas que son frontera de la región a la que queremos determinar el área. Mediante la figura nos damos cuenta que sería muy difícil utilizar otro método de cálculo de área que no sea a través de la integración, debido a las características de la región dada, ya que las curvas frontera no son rectas del plano.

La figura nos permite ver que debemos dividir la región en 2 subregiones para calcular su área, de modo que al calcular el intercepto con el eje x de la función $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ vemos que debemos trazar la recta $x = \frac{\pi}{2}$ y la región queda determinada de la siguiente manera:

$$\text{Región 1: } f(x) = 1 + \sin x \quad g(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}; \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Región 2: } f(x) = 1 + \sin x \quad g(x) = 0; \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

Para obtener el segundo intervalo de integración, la figura también nos informa que debemos hallar el intercepto con el eje x de la función $y = 1 + \sin x$. Luego el área queda expresada:

$$\begin{aligned} A_{R_1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sin x - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} - \ln \left| 1 + \sin \frac{\pi}{2} \right| + \cos 0 + \ln 1 = \frac{\pi}{2} - \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

$$A_{R_2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + \sin x) dx = \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = \pi$$

La figura indica que el área que buscamos está determinada por la suma de las áreas halladas, luego:

$$A_R = A_{R_1} + A_{R_2} = \frac{\pi}{2} - \ln 2 + 1 + \pi = \left(\frac{3\pi}{2} - \ln 2 + 1\right) u^2$$

Otros ejemplos donde podemos utilizar las figuras de análisis pueden ser los problemas de optimización relacionados con cuerpos geométricos, aquí resulta muy útil la representación de dicho cuerpo; el cálculo de derivadas parciales de funciones de varias variables cuando nos auxiliamos del árbol de dependencia, entre otros.

2. La confección de **tablas** en la resolución de problemas y ejercicios con texto constituye un valioso medio para representar claramente las magnitudes que se expresan en el texto y establecer relaciones entre ellas, lo que ayuda a interpretar la información, procesarla, recomponerla y confeccionar el plan de solución. Se emplean cuando hay varias magnitudes o informaciones en juego, por lo general se colocan en tablas de doble entrada.

En particular, las **tablas de integrales** juegan un importante papel como medio auxiliar de cálculo en el tema de la integración. Después de conocer las integrales inmediatas y los métodos de integración se familiariza al alumno con estas tablas, que además contienen las inmediatas. Se le informa qué integrales aparecen allí, algunas notaciones usadas en ellas y también cómo se puede trabajar con ellas. Por ejemplo:

- Se desea calcular la integral $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.

El alumno debe saber que esta integral no aparece en la tabla, y por tanto determinar que aplicará el método de integración por sustitución después de un análisis de la integral dada. De ahí que haga el cambio de variables:

$$u = \sin x \quad \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + c = \arctan (\sin x) + c$$

$$du = \cos x \, dx$$

El cambio de variables le permite reducir la integral dada a una que él sabe que está en la tabla, es decir $\int \frac{du}{1 + u^2}$, y poder llegar entonces a la solución. De ahí la importancia de la familiarización con la tabla, pues de otra manera el estudiante no puede llegar con éxito a la integral buscada. El profesor debe ser ejemplo de la utilización de las tablas y exigir su empleo, pues este trabajo es objeto de enseñanza.

- También las **tablas numéricas** juegan un importante papel como medio auxiliar de cálculo, aparecen al final de los libros de texto de Matemática para la enseñanza media, según las necesidades de cada

grado. Las más utilizadas son: tabla de cuadrados, tabla de cubos, tabla de senos y cosenos, tabla de tangentes y cotangentes y tabla de logaritmos.

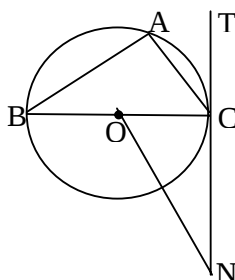
Estas tablas numéricas son de doble entrada, se trabaja con filas y columnas (dos cifras para las columnas y una para las filas), cuando nos dan números que no aparecen en la tabla hay que realizar aproximaciones y transformaciones para recurrir a los que están en la tabla.

3. Los **grafos de solución** constituyen un medio auxiliar heurístico muy útil tanto en la búsqueda de la idea de solución, como en el proceso de la solución del problema, pues permiten expresar los medios matemáticos necesarios (definiciones, teoremas y procedimientos) y el orden en el cual se les ha encontrado en el proceso de búsqueda. Son de gran utilidad para fijar la idea de solución del problema.

Veamos el siguiente ejercicio:

- Sea A un punto de la circunferencia de radio $\overline{OC}$ y centro O, donde $\overline{BC}$ es diámetro y $\overline{TN}$ es tangente en C. Además, $\overline{AC} \parallel \overline{ON}$ y $\angle ABC = 30^\circ$.

a) Prueba que $\triangle ABC = \triangle OCN$.



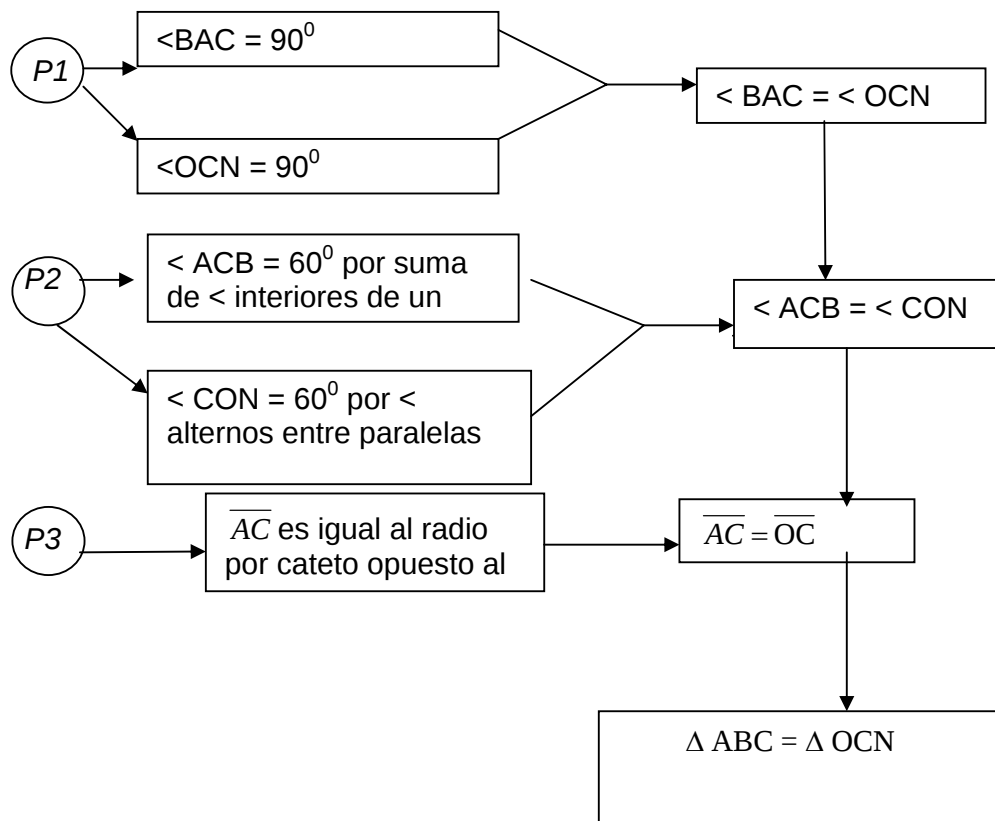
A partir de las premisas:

P_1 : $\overline{BC}$ diámetro y $\overline{TN}$ tangente en C

P_2 : $\angle ABC = 30^\circ$; $\overline{AC} \parallel \overline{ON}$

P_3 : $\overline{OC}$ radio de la circunferencia

Comenzamos a buscar relaciones que nos acerquen a la tesis, y aparecen los medios matemáticos necesarios para la solución, los que se representan en un grafo de solución.



A partir de este grafo puede pasarse a la solución del problema, es decir, a la representación de la demostración.

4. Resúmenes de definiciones, teoremas, propiedades y procedimientos.

Este medio auxiliar heurístico se presenta a través de compendios, mementos, entre otros. En los **compendios** se representa de forma panorámica y sistemáticamente ordenado, el contenido esencial de los conocimientos matemáticos tratados en la escuela, o sea, definiciones, teoremas, demostraciones importantes, tablas para facilitar el cálculo, gráficos y ejemplos. El compendio contiene un índice alfabético para facilitar rápidamente la búsqueda de un elemento del contenido. Un ejemplo de compendio de gran utilidad para la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior es el “Manual de Matemática para Ingenieros y Estudiantes” /S. Bronshtein, K. Semendiaer Editorial Mir, Moscú, 1977. 4ta edición, 696p.

Los resúmenes que aparecen al final de los Libros de Texto de Matemática para los diferentes grados de la Secundaria Básica y el Preuniversitario, son los llamados **mementos**; estos contienen de forma organizada las principales definiciones, teoremas, fórmulas, propiedades y procedimientos, que fueron objeto de estudio en grados anteriores y se necesita de su aplicación para la obtención de un nuevo conocimiento y para la solución de ejercicios.

Garantizan la reactivación oportuna de los conocimientos para acometer nuevas tareas, si se planifica con anterioridad actividades con este fin.

Otro ejemplo de **memento** es el que aparece en los libros de texto de la Carrera de Ingeniería Informática “Cálculo con Geometría Analítica”, Tomos I, II y III /Swokowsky, 2da edición, 1097p. Este aparece en las dos primeras y en la penúltima página de dicho texto. Contiene resúmenes de Álgebra, Geometría, Geometría Analítica, Funciones Trigonométricas e Identidades Trigonométricas. Todos los contenidos que aquí aparecen, son utilizados en la Matemática de la carrera en cuestión.

Ejemplo: Propuestas de cómo usar el memento en la Educación Superior.

- Al impartir el tema I de Matemática para Ingeniería Informática, que trata sobre las Funciones, se orienta hacer un estudio de las funciones que se resumen en los mementos de los libros de texto de Matemática de los diferentes grados de la Secundaria Básica y el Preuniversitario, para entonces retomar el concepto, sistematizarlo y posteriormente introducir nuevas funciones inherentes a esta asignatura.
- Al impartir el tema de los problemas de optimización, relacionados con el cálculo de máximos y mínimos de funciones de una variable real, recomendamos a los alumnos el uso del memento del texto “Cálculo con Geometría Analítica” en la 2da página del mismo, donde puede apreciarse un resumen de Geometría relacionado con el área y perímetro de las figuras planas, y volumen y áreas laterales de algunos cuerpos; esto es debido a que muchos de los problemas que resolvemos en este tema son de corte geométrico y se necesita recordar muchos de estos contenidos.

Las estrategias heurísticas. Se les llama también estrategias de búsqueda, pues constituyen el método principal para buscar los medios matemáticos concretos que se necesitan para resolver un problema y para buscar la idea fundamental de solución.

Su aplicación es razonable solamente en ejercicios para los cuales no se conoce un procedimiento algorítmico.

Existen dos estrategias heurísticas que pueden ser aplicadas a cualquier tipo de ejercicio, ellas son: el trabajo hacia adelante o método sintético y el trabajo hacia atrás o análisis creciente.

El trabajo hacia adelante : Se caracteriza por partir de los datos y deducir de ellos lo que se busca, pasando por una serie de pasos intermedios, apoyándose en los conocimientos que se tiene, de manera que se obtenga la cadena de inferencias que constituye la solución. La estrategia consiste en buscar: cuáles objetivos parciales o resultados intermedios se pueden alcanzar partiendo de las condiciones previas o elementos dados.

El trabajo hacia atrás: Se caracteriza por el examen previo de lo que se busca, suponiendo que los datos son verdaderos. El análisis empieza por lo tanto, por lo que se busca, estableciendo relaciones entre los datos y las

exigencias del objetivo final o resultado y analizar los objetivos parciales o los resultados intermedios que habría que plantearse.

Veamos un ejemplo de cómo utilizar esta estrategia heurística de trabajo hacia atrás.

Teorema: En todo triángulo rectángulo se cumple que: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

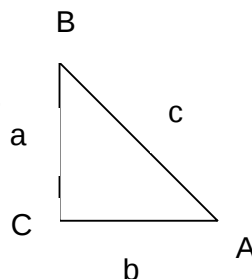
Demostración:

Si partimos de que es verdadera la tesis podemos transformarla y establecer relaciones con la premisa:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

Como en todo triángulo rectángulo se cumple que:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \text{podemos plantear:}$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \quad \text{si multiplicamos por } c^2:$$

$a^2 + b^2 = c^2$ Hemos llegado al Teorema de Pitágoras, relación que se cumple para todo triángulo rectángulo. Por lo que queda demostrado el teorema.

Conclusiones:

"Aprender a pensar es una necesidad de los estudiantes, enseñarlos a pensar es tarea de los maestros".

(Rita Concepción, 1995)

En esta comunicación hemos mostrado cómo es posible utilizar los procedimientos heurísticos en la formación de varios conceptos; estos pueden ser utilizados en cualquier situación típica de la enseñanza de la Matemática presente en cualquier forma organizativa docente de cualquier asignatura en los diferentes niveles de enseñanza, porque en general ellos están presentes en toda actividad cognitiva en que el hombre tenga que encontrar vías de solución desconocidas, altamente exigentes para el pensamiento.

Los profesores que imparten sus clases aplicando el método heurístico logran en sus estudiantes independencia cognoscitiva, comportamiento como sujetos creativos, audacia, flexibilidad, originalidad, así como capacidades para la autoevaluación, espíritu crítico y en general son más activos y persistentes.

Bibliografía

1. ALMEIDA, B. Los procedimientos heurísticos en la enseñanza de la Matemática. Bernardino Almeida, José M. González, Silvia Hernández. La Habana: ISP "Enrique J. Varona"; 1990. - - 29p. Material Mimeografiado.
2. ALMEIDA, B. Los medios auxiliares heurísticos en la enseñanza de la Matemática. Bernardino Almeida. - - Matanzas: ISP "Juan Marinello"; 1998. - - 27p. Material Mimeografiado.

3. ALMEIDA, B. Las estrategias heurísticas en la enseñanza de la Matemática. Bernardino Almeida. Matanzas: ISP "Juan Marinello", 2000. - - 30p. Material Mimeografiado.
4. Cabrera, L. La heurística en la enseñanza de la Matemática. Lizardo Cabrera, Marilú Jorge, María de los Ángeles Sardiñas. Universidad de Matanzas; Diciembre de 2003.- -51p. Monografía.
5. Hernández, R. Las funciones didácticas y los procedimientos heurísticos en la enseñanza de la Matemática. Dr. Reinaldo Hernández. Universidad de Matanzas; octubre de 2004. - -49p. Texto de la asignatura Didáctica de la Pasantía "Enfoques y perspectivas de la Educación Matemática para los niveles medio y básico".
6. Hernández, Silvia e Hilario Santana. Desarrollo del pensamiento creador en las clases de Matemática de la escuela media. En: Revista Varona. (La Habana) 9(18) : 15-25, enero-junio 1987.
7. Jungk, Werner. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1. La Habana. Edit. Pueblo y Educación. 199p.
8. Jungk, Werner. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2 (1ra parte). La Habana. Edit. Pueblo y Educación, 1979. 88p.
9. Jungk, Werner. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática II (2da parte) / Werner Jungk. La Habana. Edit. Pueblo y Educación, 1981. 176p.
10. Matemática 7mo grado / Félix Muñoz Baños... [et.al]. La Habana. Edit. Pueblo y Educación, 1989. 206 p.
11. Matemática. 8vo grado./ Félix Muñoz Baños ... [et.al]. La Habana. [s.n.], 1990 (En proceso de edición)
12. Matemática 10mo grado/ Luis Campistrous ... [et.al]. La Habana. Edit. Pueblo y Educación, 1989. 353 p. (parte II)
13. Santana, H. Las formas de trabajo y de pensamiento matemático en la enseñanza de la Matemática. MsC Hilario Santana. ISPEJV, La Habana; - -6p
14. Swokowsky, E. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda edición. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1989. 1099p