

La resolución de problemas: un reto para la educación matemática contemporánea.

Autor: Dr. Israel Mazarío Triana

Las razones de que se incluya la Matemática en los currículos escolares son múltiples y variadas. Por un lado, constituye una eficaz herramienta de trabajo (tanto intelectual como práctico); y por otro, las Matemáticas conforman un área de estudio que intenta comprender los modelos que impregnan el mundo que nos rodea y cuya actividad se podría resumir mediante la expresión “resolución de problemas”.

Por otra parte, en la sociedad actual, que experimenta un creciente desarrollo científico, tecnológico y social, se considera cada vez más importante tener una buena preparación matemática que opere como vía de acceso a dichos conocimientos.

Sin embargo, no es sólo porque está presente en todos los órdenes de la vida moderna por lo que se justifica estudiar esta disciplina. En general, la necesidad de enseñar matemáticas, se atribuye a diversos fines, los cuales se resumen en: la Matemática como instrumento que posibilita resolver diferentes problemas del entorno sociocultural, su valor formativo al contribuir al desarrollo intelectual e integral de la personalidad y la Matemática como lenguaje universal de las ciencias.

En este contexto, la problemática educativa vinculada a la resolución de problemas aparece como un aspecto importante en el aprendizaje de la disciplina. Por ello, es esencial que se tracen líneas o estrategias de trabajo que garanticen elevar sustancialmente las posibilidades de la Matemática para contribuir a la formación del estudiante y así favorecer que los contenidos matemáticos sean una herramienta útil para conseguir resolver con éxito los problemas a que se enfrenta el alumno.

Lo anterior sustenta el punto de vista del autor de que se requiere identificar las variables que se relacionan más directamente con la resolución de problemas, considerando los elementos cognoscitivos y educativos inherentes al proceso, para favorecer el desempeño exitoso del estudiante al enfrentar los problemas.

- **La definición de problema y algunas de sus derivaciones educativas.**

La experiencia demuestra que el desarrollo de actividades docentes donde se identifiquen y resuelvan problemas contribuye a potenciar el desarrollo de habilidades en los estudiantes. En este sentido, la Matemática proporciona el marco adecuado para reflexionar sobre los problemas que surgen del contenido de su propia enseñanza.

Consecuentemente, aceptar que resolver problemas es un elemento vital en el aprendizaje de la Matemática, implica la necesidad de que se tenga una idea clara de lo que se entiende por problemas y cómo los incorporamos en las clases.

Las definiciones de problema que aparecen en diferentes textos (W. Jungk (1979), S. Krulik y K. Rudnick (1980), F.J. Perales Palacios (1993), M. Sánchez (1995)), aunque diferentes conceptualmente, presentan elementos comunes o al menos no contradictorios. En general, todas coinciden en señalar que un problema

es una situación que presenta dificultades para las cuales no hay solución inmediata.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje, por el contrario, es común explicar los problemas como algo que se sabe hacer, cuya solución se conoce, que no genera expectativas. Para el profesor, incluso, no es un problema. Se precisa así, que para la actividad docente relacionada con la resolución de problemas, se tenga una idea clara de la definición del concepto "problema".

Las referencias bibliográficas que se exponen plantean los diferentes puntos de vista de sus autores al respecto.

- R. Delgado (1998, p.2), considerando la situación problemática de la cual es consciente el sujeto, define el término problema como: *"Situación verdaderamente problemática para el resolutor, para la cual, teniendo conciencia de ella, no conoce una vía de solución"*.
- I. Alonso (2001, p.13), enfoca el problema matemático desde el punto de vista de la información y estructura del problema y cómo el estudiante se lo representa y resuelve. Al respecto plantea su concepción de problema matemático como: *"Una situación matemática que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes:*
 - *condiciones y*
 - *exigencias relativas a esos elementos;*
y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias
o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su
base de conocimientos y experiencias".
- G.A. Ball (citado por A.F. Labarrere, 1987, p.6), *"caracteriza el problema como aquella situación que demanda la realización de determinadas acciones (prácticas o mentales) encaminadas a transformar dicha situación"*.
- La definición de A.F. Labarrere (1996, p.19), resume acertadamente el consenso entre las definiciones consultadas: *"Un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades, de y entre los objetos que no son accesibles directa e inmediatamente a la persona", o sea, "una situación en la que hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar"*.

En cuanto a la diferenciación entre los términos problema y ejercicio, tema de gran interés desde el punto de vista didáctico, algunos autores que han abordado dicha cuestión señalan:

- M.J. Llivina (1999, p.48), precisa cuando un ejercicio tiene carácter de problema. Sobre esta base expresa: *"Un ejercicio es un problema si y sólo si la vía de solución es desconocida para la persona"*.
- J. Martínez Torregrosa (citado por un colectivo de autores, 1999, p.3), en el mismo sentido de la reflexión anterior argumenta: *"Un correcto planteamiento didáctico de la resolución exige la distinción entre ejercicios y problemas. Para los ejercicios el alumno tiene ya disponibles respuestas satisfactorias para las*

que ha sido preparado y – al contrario de lo que sucede en un verdadero problema – no hay incertidumbre en su comportamiento”.

Estas mismas ideas se presentan implícita o explícitamente cuando se caracteriza la resolución de problemas. Así, A. Orton (1996, p.51), expresa que la resolución de problemas *“se concibe como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva”.*

Por su parte, R. Delgado (1998, p.69), considera la resolución de problemas como una habilidad matemática y señala que resolver: *“es encontrar un método o vía de solución que conduzca a la solución de un problema”.*

Según M.J. Llivina (1999, p.59), *“la resolución de problemas matemáticos es una capacidad específica que se desarrolla a través del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y que se configura en la personalidad del individuo al sistematizar, con determinada calidad y haciendo uso de la metacognición, acciones y conocimientos que participan en la resolución de estos problemas”.*

Es conveniente se enfatice, según refieren D. Gil et al (1992, pp.76-77), que algunos autores insisten justamente en el hecho de que la existencia de dificultades no es una característica intrínseca de una situación y que depende también de los conocimientos, experiencias, etc. En este sentido, citan a Elshout, quien desarrolla la idea de *“umbral de problematicidad”* diferente para cada persona y por encima del cual se puede considerar que una situación constituye un verdadero problema para la persona implicada; en esta idea de problema y umbral de problematicidad infieren una primera comprensión de los resultados negativos que pueden alcanzarse en la enseñanza habitual.

Como parte de lo anterior, es importante se destaquen los siguientes puntos de coincidencia entre las definiciones consultadas:

- a) La persona que se enfrenta a un problema debe estar consciente de la existencia de una dificultad y tener interés en resolverla, pero no cuenta con los conocimientos y experiencias que le permitan directa o inmediatamente darle solución.
- b) La resolución de problemas constituye un proceso de razonamiento donde la Psicología y la Didáctica encuentran puntos de referencia imprescindibles.
- c) Los problemas siempre deben ser portadores de nuevos elementos para el que aprende. No se consideran problemas aquellos ejercicios rutinarios que se presentan en las clases de Matemática para desarrollar algunas habilidades específicas y que en ocasiones promueven la memorización y el mecanicismo.
- d) La resolución de problemas es un proceso “productivo” y no meramente “reproductivo”.

Desde la misma perspectiva teórica, se considera que las situaciones de aprendizaje sustentadas en la resolución de problemas, deben tener tres elementos distintivos para que adquieran su verdadero significado:

- **Motivación:** El estudiante ha de experimentar un desafío, una contradicción que lo impulse hacia la búsqueda de la solución.
- **Sincretismo:** La situación se presenta de forma tal que al inicio, no se identifican con claridad o precisión algunas de sus componentes.
- **Acciones:** El estudiante debe ser consciente de que para poder resolver el problema debe ejecutar una serie de acciones conducentes a su solución.

En este orden de ideas, se analiza que por la relevancia que tienen estos tres aspectos para este trabajo, es necesario se integren en una nueva definición de problema sobre la base del estudio teórico realizado. Así, se elabora la siguiente *definición*:

Un *problema* es una situación o dificultad prevista o espontánea, con algunos elementos desconocidos para el sujeto, pero capaz de provocar la realización de acciones sucesivas para darle solución.

Por otro lado, se considera la resolución de problemas como una habilidad, y como tal se caracteriza y estructura, todo ello en base a determinadas acciones, que son las que permiten acceder a las vías para resolver los problemas.

Así, la realización de acciones con un propósito determinado es producto del desarrollo social que van alcanzando las personas a través de su actividad. En este proceso, en la medida que el hombre adquiere conocimientos teóricos y los lleva a la práctica, llega a dominar la acción a manera de “saber hacer”, condición indispensable para la realización de cualquier actividad. A continuación se define la habilidad resolver problemas de Matemática.

Definición de la habilidad resolver problemas de Matemática: “proceso que implica la realización de una secuencia o serie de acciones para la obtención de una respuesta adecuada a una dificultad con intención de resolverla, es decir, la satisfacción de las exigencias (meta, objetivo) que conducen a la solución del problema matemático”.

Se considera que esta definición enfatiza el carácter de proceso con que se identifica a dicha habilidad en este trabajo, lo que responde al hecho de descomponerse en diferentes acciones progresivas que se deben desarrollar integralmente, sucediéndose unas a otras hasta obtener un resultado (la solución del problema matemático).

Para finalizar este punto, se plantea otro aspecto pedagógico que deben reunir los problemas, el que respondan en lo posible a los intereses y necesidades de los estudiantes. Los elementos que contenga el problema deben estar en estrecha relación con el círculo de ideas, conocimientos y experiencias del alumno dentro del nivel de enseñanza que curse.

Confirma lo anterior lo expresado por David Hilbert (citado por J. Stewart, 1998, p.VIII): “*Un problema matemático debe ser difícil para que nos seduzca, pero no inaccesible para que no se burle de nuestros esfuerzos*”.

- **Algunos enfoques en la clasificación de los problemas.**

En cuanto a la clasificación de los problemas, en la bibliografía consultada ésta se realiza atendiendo a diversos criterios: campo disciplinario, tipo de tarea, naturaleza del enunciado, etc., pero siempre apuntando a diferentes tipos de problemas que por tanto deben enfrentarse de distintas maneras.

De entre varias perspectivas posibles (W. Jungk (1979), A.F. Labarrere (1987), E. Carballal y C. Díaz (1990), y otros)), los problemas conviene clasificarlos por la naturaleza de la solución en “*abiertos*” y “*cerrados*” (R.M. Garret, 1995, p.8). Se consideran problemas cerrados aquellos que tienen una solución única, son objetivos, a veces hay un algoritmo de trabajo que garantiza la respuesta o requieren de un conocimiento específico o técnica para su solución. Los problemas abiertos son los que tienen varias posibles soluciones, son subjetivos,

sólo podemos hallar su mejor respuesta, la heurística puede guiar la reflexión y requieren de una amplia gama de información.

J.I. Pozo et al (1994), establecen una diferenciación interesante entre problema científico, problema docente (escolar) y problema cotidiano.

Un *problema científico*, según estos autores, conlleva un interés personal del que pretende solucionarlo y una metodología científica de trabajo, que consiste en un modelo idealizado con las correspondientes hipótesis de origen enmarcadas en un contexto científico.

El *problema docente* tiene otras implicaciones motivacionales, ya que el estudiante se enfrenta a la búsqueda de su solución para dar respuesta a un planteamiento que le hace el docente, sus posibilidades de formulación de hipótesis se reducen y las interrogantes, o la temática objeto de estudio, centra la atención en factores tratados con anterioridad.

El tercer caso, es decir, los *problemas cotidianos*, son asumidos por los individuos y su finalidad es obtener un resultado, que no tiene que implicar la comprensión ni explicación científica. Su procedimiento de resolución se fundamenta en la experiencia personal, su similitud con otras situaciones o en técnicas de ensayo-error.

En nuestro estudio se utilizan esencialmente los problemas docentes (cerrados o abiertos) con texto o enunciados, que además, son por lo general, los que el estudiante reconoce como tales, sin que por ello se dejen de considerar otras situaciones que no poseen textos, pero que bajo determinadas circunstancias, son consideradas como problemas. Estos últimos también se pueden resolver aplicando muchos de los aspectos considerados en este trabajo.

- **Revisión crítica de algunos modelos de resolución de problemas.**

Continuamos con una reflexión sobre los modelos de resolución de problemas que se reconocen como los más influyentes en la Didáctica de la Matemática y de las Ciencias en general, para de esta forma ubicar la influencia que la resolución de problemas ha tenido en las investigaciones y la práctica docente habitual.

El análisis de diferentes modelos de resolución de problemas que se vienen planteando en los últimos tiempos y que se inscriben en diversas tendencias permite categorizarlos de forma general en diferentes tipos, unos con orientaciones de tipo psicológico, pedagógico e idiosincrásico y otros, de tipo filosófico-científico. Aunque en ocasiones resulta difícil precisar la filiación de un modelo en algún apartado, estos se pueden caracterizar brevemente en:

1. Las investigaciones que se ocupan de contrastar los mecanismos incorporados por aquellos resolutores con mejores desempeños para los cuales se comparan los procedimientos utilizados por expertos y novatos.
2. Las investigaciones algorítmicas, que se proponen aumentar la efectividad en la resolución de problemas mediante la prescripción exacta del orden determinado en que han de ejecutarse un sistema de operaciones para resolver todos los problemas de un cierto tipo. Tienen un componente importante de indicaciones dadas a través de un programa de acciones y operaciones.
3. Las investigaciones que consideran la creatividad como elemento fundamental en el proceso de solución.

4. Las investigaciones que consideran que pueden conseguirse avances en el proceso de resolución a través de un cambio conceptual, metodológico y actitudinal.

En nuestro país también es posible identificar un conjunto de investigaciones sobre resolución de problemas que tienen en común su fundamentación en la psicología soviética y el pensamiento pedagógico cubano, sin dejar de considerar otros aportes significativos a la práctica pedagógica.

Estos trabajos han aportado reflexiones en torno a la enseñanza de la resolución de problemas.

A continuación se realiza un análisis de algunos modelos de resolución de problemas que por su trascendencia constituyen una importante referencia en trabajos sobre resolución de problemas.

- Modelo de G. Polya.

La propuesta de modelo teórico de resolución de problemas de G. Polya, a partir de su libro “Cómo plantear y resolver problemas” consta de cuatro fases, que se consideran esenciales para fundamentar algunos puntos de este estudio. Esto se debe a que todos los modelos de resolución de problemas derivados a partir de este trabajo, están estructurados a partir de un fundamento común, las cuatro fases expuestas por este autor, y que propone los siguientes pasos:

- Aceptar y comprender las condiciones del problema.
- Planificar su solución.
- Llevar a cabo el plan planificado; y
- Comprobar, verificar la solución.

Esta propuesta no indica más que una coincidencia estructural esencialmente formal entre los distintos modelos de resolución de problemas y apunta a consideraciones básicas comunes a todos los problemas.

Los trabajos de resolución de problemas se han proyectado a la búsqueda de otros modelos y propuestas más actuales para reforzar la resolución de problemas. No obstante, se estima que el modelo de G. Polya y sus etapas, están presentes de una forma u otra en modelos posteriores y es susceptible a ser enriquecido con nuevos elementos, sin perder la vigencia de su propuesta.

- Modelo de A.H. Schoenfeld.

El modelo de A.H. Schoenfeld que aparece en el libro “Mathematical Problem Solving” (1985), presenta el interés de retomar algunas ideas de G. Polya, profundizando en el análisis de la heurística y considerando las reflexiones que sobre los problemas matemáticos se han hecho hasta ese momento en campos avanzados de la Computación como la Inteligencia Artificial y en el de la Teoría Psicológica del Procesamiento de la Información.

Como resultado, su trabajo muestra una considerable superación en lo referente a categorías y otros puntos de vista sobre el tema que nos ocupa.

Es así, que a partir de los resultados de sus investigaciones, A.H. Schoenfeld considera cuatro dimensiones en el proceso de resolución de problemas:

1. Dominio de conocimientos y recursos: Expresados a través de lo que el sujeto conoce y la forma de aplicar experiencias y conocimientos ante situaciones de problemas.

2. Estrategias cognoscitivas: Categoría que contempla el conjunto de estrategias generales que pueden resultar eficaces para acceder a la solución de un problema. Dentro de la misma se pueden identificar recursos heurísticos para abordar los problemas matemáticos tales como: analogía, inducción, generalización, entre otros.
3. Estrategias metacognitivas: Se caracteriza como la conciencia mental de las estrategias necesarias para resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo.
4. Sistema de creencias: Esta conformado por las ideas, concepciones o patrones que se tienen en relación con la Matemática y la naturaleza de esta disciplina. Además, cómo esta se relaciona o identifica con algunas tendencias en la resolución de problemas.

En relación a estos aspectos del modelo, es importante desde el punto de vista teórico y práctico que se consideren sus categorías cuando se explora en el pensamiento matemático de los estudiantes, favoreciendo actividades donde se propicien la interpretación y búsqueda de soluciones a los problemas, a manera de mostrar la experiencia de los hechos y relaciones matemáticas en una totalidad coherente. Pero también, y esto es fundamental, ya que no se hace evidente en el modelo, debe quedar manifiesto el carácter social de esta ciencia.

- Modelo de Mason-Burton-Stacey.

La selección del modelo de J. Mason, L. Burton y K. Stacey que aparece publicado en la obra "Pensar Matemáticamente" (1989) para su análisis valorativo, se fundamenta en las siguientes razones:

- El tránsito entre las fases de trabajo con el problema no se realiza de forma lineal.
- La resolución de problemas se concibe como un proceso dialéctico, donde las tareas pueden sufrir altibajos, es decir, se puede avanzar, también retroceder. Esta característica le otorga singularidad al modelo.
- La persona que resuelve el problema tiene un papel fundamental, ya que sus características psicológicas son un recurso más a utilizar en el logro de su objetivo.

Además, la concepción del problema es de gran importancia didáctica, lo que se debe a:

- Se le da un enfoque positivo al hecho de no poder avanzar en la resolución del problema.
- Se le asigna una gran importancia a la fase de revisión, con frecuencia no abordada con suficiente profundidad.
- El modelo no se presenta como un planteamiento estructurado sobre la resolución de problemas, sino que trasciende y analiza lo que constituye el pensamiento y la experiencia aportada por la Matemática, ilustrando una manera de enfocar la vida al mismo tiempo que posibilita conocerse uno mismo.

Sin embargo, cuando se reflexiona sobre el modelo, este tiene puntos concretos como el de "monitor interior" que puede constituir una dificultad para los estudiantes que no han desarrollado suficientemente la habilidad resolver problemas, lo que hace difícil adaptarlo al contexto del aula, por lo que en este caso, se considera más recomendable que el estudiante al presentar dificultades

acuda a un “monitor exterior”, que puede ser el docente, un compañero de aula, material didáctico, etc., lo que de inicio puede ser un recurso más efectivo para favorecer la resolución de problemas.

- Modelos de resolución de problemas que consideran las diferencias entre expertos y novatos.

Las diferencias que se establecen entre expertos y novatos al enfrentar los problemas es un punto de vista ineludible en los trabajos de investigación.

El estudio de las diferencias entre expertos y novatos se incluye en el campo de la Psicología Cognitiva y tiene su origen en la extensión de los estudios relativos a la concepción del aprendizaje como procesamiento de información. El fuerte impulso que han recibido estas investigaciones está relacionado con el desarrollo del diseño de sistemas informáticos expertos en la solución de problemas específicos. Un aspecto básico del diagnóstico que establecen estos estudios es obviamente que existen buenos y malos resolutores, o expertos y novatos, así como la valoración de que las diferencias entre ambos tipos de resolutores se deben a diferente estructuración del conocimiento. De ahí que se comparan los procesos empleados por ambos grupos en la resolución de problemas. El objetivo de estas investigaciones es arribar a criterios que posibiliten a los novatos conocer o acceder a formas de actuación eficientes para mejorar su desempeño al resolver problemas.

En relación con este modelo, y a pesar de la información que del mismo es posible obtener, se considera que no se profundiza suficientemente aún en el por qué de las diferencias entre expertos y novatos al resolver problemas, aunque se pueden tener criterios al respecto. No obstante, a partir de tales diferencias se infieren recomendaciones y pasos concretos para acortar la “distancia” entre un tipo de resolutor y otro. Además, resulta importante acercar a los estudiante a desempeños expertos ya sea a través del despliegue por parte del profesor de todas las acciones que inciden en la resolución de un problema o favoreciendo las interacciones con otras personas, propiciando de esta forma que los estudiantes puedan acceder en algún momento a tal condición.

- Modelos algorítmicos de resolución de problemas.

En términos matemáticos, y en las Ciencias en general, se define algoritmo como el procedimiento que a través de la ejecución de acciones u operaciones secuenciadas permite resolver ejercicios o problemas de cierto tipo.

Por otra parte, se consideran resueltos un conjunto de problemas standard o tipo cuando se ha encontrado un algoritmo de solución, búsqueda que además no se excluye de los propósitos esenciales de la Matemática.

Partiendo de formulaciones análogas a las que se exponen en los modelos de resolución de problemas basados en el procesamiento de la información (A. Newell y H.A. Simon, 1972), es decir, aquellos que suponen que el funcionamiento del cerebro humano se puede describir a través de algoritmos matemáticos e incorporarlos en programas computacionales, desconociendo el componente afectivo, las motivaciones, entre otras características de los seres humanos, han surgidos modelos de resolución que tratan de establecer similitudes entre lo que hacen las computadoras cuando procesan la información y lo que hace la mente humana para enfrentar problemas (R. Chrobak, 1998).

En consecuencia, se admite que de esta forma sólo se enseña a los estudiantes a resolver problemas que puedan remitirse a algún problema tipo cuya solución se trata previamente, lo que se corresponde con la teoría del procesamiento de la información en la cual se enmarca este método.

Desde otro punto de vista N. Krinitski (1988, pp.42-43), atribuye un valor peculiar a los algoritmos acumulados en Matemática, ya que esta rama penetra en otras ciencias y su riqueza es el tesoro de todas las ciencias, y argumenta:

Los algoritmos son:

1) Una forma de expresar resultados científicos; 2) una guía para la acción al resolver los problemas ya estudiados, y como consecuencia: 3) un medio que permite economizar el trabajo intelectual; 4) una etapa necesaria al automatizar la solución de problemas; 5) un procedimiento (instrumento) que se utiliza para investigar y resolver nuevos problemas (sobre todo eso se refiere a los algoritmos matemáticos); 6) uno de los medios de renovación de las matemáticas; 7) uno de los modos para describir procesos complejos.

Los criterios, muy justificados de los autores consultados permiten reflexionar sobre este modelo y concluir que la automatización fundamentada en algoritmos no puede conducir a extremos, hay problemas que no puede resolver un algoritmo. Sin embargo cuando un estudiante soluciona un problema, incorporando en su desempeño una estrategia eficiente que puede derivar en un algoritmo para enfrentar otros similares, y reflexiona cuando esta no puede ser aplicada y debe buscar otros recursos, entonces, se puede confirmar la validez de su aprendizaje. Además, aplicando algoritmos, pueden resolverse un número significativo de problemas.

- Modelo de resolución de problemas como investigación.

Son múltiples los factores que determinan se analice este modelo. De inicio y a partir de la clasificación de los problemas se plantea la necesidad de tratar en clases no solamente problemas cerrados sino además los denominados abiertos, lo que se relaciona de forma particular con el interés de darle a la Matemática, en cierta medida, un carácter experimental, que a veces no se tiene presente al impartir esta disciplina. Muy en relación con el comentario anterior, M. de Guzmán et al (1991, p.129), expresa: *“La Matemática es, en buena medida una ciencia experimental, al hacer experimentos con los datos del problema te familiarizarás con ellos y más fácilmente se te ocurrirá lo que debes hacer para resolverlo”*.

Estas concepciones conducen a revisar la descripción del modelo de resolución de problemas como investigación. Se exponen a continuación sus fases principales (D. Gil et al, 1991):

- a) Considerar cual puede ser el interés de la situación problemática abordada a partir de una discusión previa sobre el interés de la misma, que proporcione una concepción preliminar y favorezca el interés y la motivación hacia la tarea.
- b) Comenzar por un estudio cualitativo de la situación, intentando acotar y definir de manera precisa el problema, explicando las condiciones que se consideran reinantes, etc.
- c) Emisión de hipótesis fundadas sobre los factores de los que puede depender el resultado buscado y sobre la forma de esta dependencia, imaginando, en particular, casos límite que den verosimilitud a las soluciones buscadas.
- d) Elaboración de estrategias previas a la resolución que guiarán dicho proceso.

- e) Resolución propiamente dicha, verbalizando al máximo, fundamentando lo que se hace y evitando operativismos carentes de significación..
- f) Contrastación del resultado obtenido, valorando su coherencia interna en relación a las hipótesis emitidas.
- g) Considerar las perspectivas abiertas por la investigación realizada contemplando, por ejemplo, el interés de abordar la situación a un nivel de mayor complejidad o considerando sus implicaciones teóricas (profundización en la comprensión de algún concepto) o prácticas (posibilidad de aplicaciones técnicas).

A pesar de sus puntos de contacto con la actividad investigativa, no está entre los objetivos de este modelo reproducir exactamente el comportamiento científico, sino más bien se trata de propiciar que los estudiantes apliquen procedimientos de probada eficiencia en la resolución de problemas por los científicos, como son: analizar las condiciones de la situación hasta llegar al problema preciso, emitir hipótesis, elaborar estrategias de resolución, entre otras acciones incluidas en la metodología científica.

Otra evidencia a favor de este modelo es que integra con los procedimientos propios, otros considerados necesarios por diversos modelos desde orientaciones distintas, y esto no se produce como una fusión de etapas inconexas sino de una estructura coherente y funcional.

No obstante, a partir del análisis, se pueden hacer algunas consideraciones acerca de este modelo, que aunque no fue concebido para la Matemática, si tiene características que establecen formas de trabajo accesibles a cualquier ciencia.

En primer lugar, se alerta de que los procedimientos seleccionados en este modelo se dirigen más hacia la metodología de la ciencia que a los procesos mediante los cuales se aprende ciencia. Consecuentemente, es importante al considerar aspectos del mismo el no limitarse a implementar una serie de técnicas que emplean los científicos (observación, interpretación, etc), sin dejar de mencionar que el trabajo científico se desarrolla en un contexto más amplio y requiere de un mayor esfuerzo y dedicación, sin excluir presiones procedentes del medio social, mayor responsabilidad, recursos, y otras condiciones. Esta visión se debe llevar al alumno.

Se han presentado diversos modelos que enfocan la resolución de problemas desde la perspectiva de varios autores.

Sin embargo, se observa que sus prescripciones se encaminan a facilitar la resolución de problemas que no son los que generalmente se abordan en las aulas. Esto hace difícil su implementación en el proceso de enseñanza-aprendizaje donde hay una dinámica entre objetivos-contenidos-proceso y otros factores que conducen a la búsqueda de recursos más próximos a las condiciones en que se desarrolla nuestra docencia.

No obstante, dentro del contexto teórico de referencia y por encima de la complejidad que conlleva el estudio de todos estos modelos, no se puede perder de vista su contribución a la práctica docente. En efecto, los aspectos que se plantean sobre la temática estudiada enriquecen su campo conceptual. Desde este ángulo, se expusieron las razones por las que cada uno de los modelos puede contribuir, en cuestiones específicas, a hacernos entender el proceso de

enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos y a mejorar el trabajo docente.

Por otra parte, en general en cada modelo se considera la resolución de problemas como un proceso complejo que implica transitar por una serie de fases, pasos o etapas y aplicar conocimientos y experiencias para llegar a una solución.

En este sentido, se coincide con L. Campistrous y C. Rizo (1996, pp.62-63), cuando expresan que: "...el esquema básico de todos los procesos es el de Polya, pero consideramos que este esquema hay que abrirlo, hay que dar recursos para profundizar en el significado de cada paso y en el qué hacer para lograr la meta en cada caso", y añaden, "Se busca que el alumno deje de ser objeto de enseñanza y pase a ser sujeto de su aprendizaje, es decir, describir el procedimiento en acciones para el alumno".

Lo anterior es indicativo de la necesidad de que se aborde el tratamiento didáctico de los problemas de Matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje a partir de las necesidades o problemas que se detecten, de manera de aportar herramientas a profesores y estudiantes que contribuyan a salvar la "distancia" que existe entre los principios básicos generales de una disciplina y su aplicación a la resolución de problemas

- **¿Cómo contribuir a desarrollar la habilidad resolver problemas de Matemática?**

No es fácil dar respuesta a esta pregunta, ni tampoco su respuesta es única. La solución pedagógica adecuada a todas las interrogantes que tenemos los educadores de estos días no es precisamente una tarea exenta de dificultades; el reto es grande y la meta se ubica en acercarnos al problema educativo y su solución. Sin embargo, se pueden aportar algunas recomendaciones en función de las variables sobre las que se acciona y que resultan de utilidad para mejorar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas.

- **Sistema de acciones para resolver problemas de Matemática.**

Entre las cuestiones teóricas que se plantean sobre la actividad, nos interesa particularmente aquella que se refiere al análisis estructural-operacional de la habilidad resolver problemas de Matemática.

Este interés se relaciona fundamentalmente con el propósito de determinar un sistema de acciones lo suficientemente generales como para que una vez aplicado a la resolución de cualquier problema matemático de los que se abordan en el aula, se puedan transferir, mediante la enseñanza adecuada, a cualquier situación nueva que se presente a los estudiantes. Por ello, se especifica que en este trabajo cuando se refieren acciones generales, no quiere decir acciones universales. El carácter general de los acciones es siempre relativo, ya que se relaciona con aquellos tipos de problemas a cuya solución se puede acceder mediante la aplicación de tales acciones.

El docente sólo puede indicar ciertas formas de llegar a la solución del problema que en parte orienten las acciones del estudiante, pero no las determinan completamente. El resolutor debe mientras resuelve el problema, encontrar y llevar a cabo las acciones que la situación requiera.

De hecho es imposible conocer o prever todas las operaciones que serán necesarias para resolver un problema. Para resolver múltiples problemas la

cuestión no es simplemente la de aplicar ciertos conocimientos y medios de acción a una situación concreta, más bien se trata de aprender lo que aún no se ha aprendido y de descubrir lo desconocido. Además, las operaciones que implica la resolución de problemas son muy diversas para presentarlas en una lista completa y definitiva.

Sin embargo, se concuerda con L.N. Landa (1978), cuando expresa que enseñar a actuar con base en el conocimiento de las acciones facilita y acelera considerablemente el desarrollo de habilidades, y a un tiempo mejora su calidad. El conocimiento de las acciones permite controlarlas conscientemente y a voluntad, lo que propicia una generalización más amplia y rápida de las operaciones. De esta manera, el desarrollo de una habilidad se manifiesta a través del ajuste de las acciones que el estudiante debe hacer a las condiciones del objeto.

A partir de estos argumentos, y considerando las fases de los modelos de resolución de problema y la experiencia adquirida por el autor a través de quince años de labor docente, se formula el siguiente *sistema de acciones* para estructurar la *habilidad resolver problemas de Matemática*.

- Descripción del sistema de acciones para resolver problemas de Matemática.

1.- Analizar el problema.

Esta acción se manifiesta desde el momento en que el estudiante enfrenta el problema y trata de descomponerlo en sus partes integrantes con el objetivo de identificar los datos que le aporta el enunciado, las relaciones establecidas entre los diferentes componentes de la situación planteada y, simultáneamente, determinar las interrogantes que debe responder. Se trata de un análisis estructural, cualitativo y operacional. Esta actividad analítica se complementa con otra de síntesis en la cual se logra una reestructuración consciente de la situación que se desea resolver.

2.- Generar estrategias de trabajo.

Esta acción consiste en que el alumno se plantee una visión general del procedimiento o procedimientos que conduzcan a la solución del problema, es decir, planifique una estrategia directriz para evitar el proceder de modo prematuro sin disponer de un plan para obtener la solución.

3.- Valorar las consecuencias de la aplicación de la estrategia que se considere más adecuada.

El pronosticar sobre las consecuencias de una forma específica de proceder para resolver un problema y posteriormente observar su cumplimiento, es también una acción mental. Supone la capacidad de pensar antes de actuar, de predecir cómo será la acción o ejecución y habitúa al estudiante a realizar esta "práctica cognitiva previa" con mayor eficacia.

Al seleccionar entre varias estrategias "la mejor opción" se debe tener en cuenta que esta es una acción que conduce al estudiante del modo más ventajoso a la solución de un problema.

4.- Ejecutar o desarrollar la estrategia seleccionada.

La ejecución consiste en la aplicación sistemática de las operaciones y los medios de trabajo previstos para solucionar el problema.

Su desarrollo supone el dominio eficiente de modelos, estrategias y procedimientos de resolución de problemas, que permiten realizar acciones progresivas que conducen a un resultado, la solución del problema.

5.- Evaluar los logros y dificultades durante la ejecución.

Esta acción consiste en ir valorando los aciertos y deficiencias a través de todo el proceso de resolución del problema matemático de manera de realizar los ajustes necesarios que posibiliten la correcta solución del problema.

A lo largo de la descripción presentada, es fácil constatar que el objetivo de las acciones en la resolución de problemas (léase: analizar-generar-valorar-ejecutar-evaluar) es siempre transformar una situación inicial (dada por el problema) en una situación final (lo que se busca, resultado, tesis).

• Tareas.

Las tareas constituyen un conjunto de propuestas concretas a que se enfrenta el estudiante y que tienen la finalidad de modelar las acciones que conforman la habilidad resolver problemas de Matemática, es decir, es la vía para lograr el desarrollo de habilidades. Así, el sistema de tareas está formado por los siguientes tipos de tareas:

1. Las enfocadas a la comprensión conceptual.
2. Resolver los problemas de lápiz y papel.
3. Resolver problemas a través de una pequeña investigación.

Con la planificación de las tareas del primer tipo se tuvo en cuenta que las mismas tributen a la resolución de problemas matemáticos, ya que el desarrollo de habilidades cognitivas (donde se incluye la resolución de problemas de Matemática) está estrechamente vinculado con la comprensión teórica de los conceptos, así como de los teoremas y propiedades relacionados con estos conceptos. Para las tareas del segundo tipo se elaboraron un conjunto de problemas que se orientan a los estudiantes durante el desarrollo de las clases para resolver tanto dentro como fuera del aula. El tercer tipo de tarea, constituyó una manera de involucrar a los estudiantes y hacerlos trabajar en la búsqueda independiente o grupal de la solución a través de una pequeña investigación mediante la cual el propio alumno, al detectar la existencia de un problema por lo general abierto, lo formula independientemente, llega a conclusiones y valida los resultados. De esta manera se pretende favorecer el aprendizaje de la Matemática como ciencia, con un marcado carácter científico-experimental, sobre la base de las condiciones concretas de la enseñanza superior y de las experiencias acumuladas, además de permitir la “visualización social” de las situaciones matemáticas al enfocarse la práctica del aula en un contexto social determinado.

Por otra parte, para lograr que los estudiantes sean capaces de resolver los problemas independientemente y a su vez garantizar un adecuado nivel de generalización de la acción, se identifican las características estructurales más sobresalientes de las tareas. Desde un punto de vista práctico, este análisis estructural permite que se planifiquen diversas variantes en la presentación de las mismas. Pero además, un supuesto básico fundamental en todo entrenamiento para la formación de habilidades es que se transformen o transfieran las condiciones de aprendizaje de una situación a otra.

Así pues, para lograr un adecuado nivel de generalización de la acción se tuvo en cuenta que en la estructura de las tareas se presentaran las más diversas variantes combinatorias de los siguientes elementos:

- a) *La estructura matemática del problema*: Dada por la cantidad de operaciones a realizar y por las dificultades conceptuales que impliquen su solución.
- b) *La forma de estructurar el problema* (oral, escrita, gráfica, etc); considerando los siguientes aspectos:
 - *Condiciones bajo las cuales se ofrecen los datos* (se dan todos los datos, no se da ningún dato, se dan algunos datos).
 - *Tipo de enunciado* (abierto, cerrado, real, académico)
 - *Grado de conocimiento de la situación de problema* (conocida, poco conocida, desconocida).
 - *Preguntas* (al final del problema, al comienzo del problema, número de preguntas, etc).
 - *También se consideró en la estructuración de la tarea*: El vocabulario y la estructura de las frases del enunciado, la organización de la información, los aspectos visuales (tablas, gráficas, entre otras ilustraciones), etc.

Se observa que un mismo problema se puede considerar para ilustrar los diferentes aspectos que se combinan en la estructura de una tarea, esto significa que en los problemas, por lo general, dichos elementos no se presentan aislados, sino integrados en una misma situación.

Orientaciones para resolver problemas de Matemática.

Constituyen un “ordenamiento” de las operaciones necesarias para la realización exitosa de las acciones de la habilidad resolver problemas de Matemática. Se recomienda que estas orientaciones se den a los estudiantes de forma oral al resolver los problemas en clases.

A continuación, se exponen de manera sucinta, algunas de las orientaciones que sirven de guía para realizar las acciones correspondientes a la habilidad resolver problemas de Matemática:

I- Analizar el problema.

Objetivo:

Analizar el problema, identificando lo que se pide y la información necesaria para resolverlo.

Orientación:

1. Lea (comprensivamente) el enunciado del problema o plantéese el mismo, aclarando el significado de todos los términos que aparecen en el texto e interprete la información que se brinda no solamente a través del enunciado, sino también en gráficas o tablas.
2. Asigne variables a las magnitudes requeridas y ordénelas del modo más conveniente para su estudio, es decir, disponga los datos de manera que se muestren de forma clara, ordenada y simultánea. Establezca relaciones entre ellos a modo de determinar lo que se necesita para resolver el problema y lo que no es pertinente.
3. Valore la posibilidad de ilustrar la situación del problema a través de un gráfico, figura, tabla, etc., a partir de la información recogida.
4. Centre la atención en lo que se debe encontrar, interprete las indicaciones y establezca qué relación debe hacerse operativamente: a) busque patrones; b)

descarte posibilidades; c) aisle la fuente de dificultad; d) descubra los aspectos parciales que dificultan el problema; e) determine la información que falta y; f) decida en qué sector está la dificultad, es decir, si esta es estrictamente personal y se requiere para su solución, recurrir al libro de texto, material didáctico, compañeros de grupo o profesor.

II- Generar estrategias de trabajo.

Objetivo:

Concebir el procedimiento más apropiado para solucionar el problema.

Orientación:

1. Relacione la situación dada en el problema con sus conocimientos y experiencias.
2. Determine si se han solucionado en clases problemas análogos al que se le propone o pregúntese (investigue) que han hecho otros para resolverlos.
3. Establezca si es posible formular hipótesis o conjeturas provisionales como guías para la solución del problema.
4. Pruebe experimentar de manera implícita o explícita diferentes estrategias que orienten hacia la búsqueda de resolución.
5. Intente concebir estrategias alternativas para resolver el problema antes de asumir cualquier estrategia.

III- Valorar las consecuencias de la aplicación de la estrategia que se considere más adecuada.

Objetivo:

Analizar previamente las opciones posibles para resolver el problema tratando de seleccionar la más adecuada.

Orientación:

1. Dedique tiempo a pensar, planear y reconsiderar la estrategia de resolución antes de decidirte a resolver el problema.
2. Valore la posibilidad de decidir la forma de resolución más adecuada posible o que te resulte más conveniente.
3. Determine a partir de este análisis cual es la estrategia a desarrollar.

IV- Ejecutar o desarrollar la estrategia seleccionada.

Objetivo:

Aplicar la estrategia planificada para resolver el problema.

Orientación:

1. Precise su dominio de los conocimientos necesarios para obtener la solución.
2. Estructure todo el problema en grupos de problemas más sencillos o subproblemas.
3. Pruebe las hipótesis que surjan del análisis de casos sencillos.
4. Realice las operaciones controlando cada paso.
5. Pruebe con soluciones gráficas y otros procedimientos que lleven hacia métodos sistemáticos.
6. Escriba con claridad y explique brevemente lo que hace.
7. Señale con recuadros, subrayados, etc., lo que considere más importante en la resolución del problema.

V- Evaluar los logros y dificultades durante la ejecución.

Objetivo:

Comprobar que la solución es correcta, si satisface las condiciones dadas en el problema.

Orientación:

1. Revise el problema asegurándose de que la solución obtenida corresponde a la pregunta formulada.
2. Pregúntese si la respuesta tiene sentido, si se corresponde con sus estimaciones o predicciones razonables.
3. Refleje en el papel todos los cálculos realizados con conocimientos matemáticos o con el auxilio de la calculadora, lo que posibilita el poder realizar rectificaciones y seguir el proceso, comprobando que no se han cometido errores de cálculo (sobre todo si conducen a respuestas carentes de sentido), que las unidades sean correctas y que satisface las condiciones del problema.
4. Revise con profundidad lo que se ha hecho (ensaye el camino inverso, elimine datos y agréguelos valorando su influencia en la solución).

Por supuesto, a pesar de que se ha intentado un “ordenamiento de orientaciones” en base a determinadas operaciones o microacciones que frecuentemente se asocian con la resolución de problemas, es imposible establecer todas las operaciones que serán necesarias para resolver los problemas, el orden necesario de las mismas y la relación entre las operaciones y las situaciones específicas.

Sin embargo, la cantidad, naturaleza y carácter de la información que diariamente recibe un estudiante hace necesario que se le indiquen ciertas formas de llegar a la solución que en parte orienten las acciones y microacciones del resolutor, aunque no las determinen completamente. El estudiante al incorporar tales instrucciones debe, mientras resuelve el problema encontrar y llevar a cabo las acciones que la situación requiera.

Para que se pueda lograr lo anterior, el docente procede comenzando por resolver problemas él mismo, especificando la dirección de la búsqueda de la solución y efectuando las operaciones correspondientes al proceso de resolución, para de este modo hacer conscientes a los estudiantes de las mismas durante este proceso y llevarlos gradualmente a la determinación independiente de las operaciones en las condiciones específicas de las tareas. Además, se trata de que los alumnos participen en la construcción de esta base orientadora de las acciones de manera de implicarlos afectiva y cognoscitivamente en su propio proceso de asimilación de los conocimientos y habilidades.

Si bien se ha planteado una secuencia de orientaciones para resolver los problemas, esta línea de trabajo metodológico no constituye una “receta operatoria” para que el alumno la repita o realice mecánicamente, las necesidades y exigencias del aula pasan a través de la creatividad constante del profesor, quien es el agente orientador, innovador y dinamizador del proceso docente-educativo.

En concordancia con estas ideas, en el proceso de enseñanza se trabaja para incentivar en el estudiante su motivación e interés por resolver los problemas apelando a todos los recursos a su alcance. En este caso, el problema más

sencillo puede resultar oportuno para estimular en el alumno la reflexión a partir de las acciones y operaciones que realice, así obtendrá nociones de su propio progreso personal.

Con este propósito se confecciona la Guía didáctica del estudiante para la resolución de problemas de Matemática.

Esta guía, cuyo origen se halla en los trabajos de Polya, consiste en un conjunto de pregunta y recomendaciones metodológicas que se elaboran y ordenan mediante el trabajo interactivo entre el profesor y los estudiantes con el objeto de orientar el proceso de resolución de problemas. Las informaciones que reciben los estudiantes a través de esta guía conducen sus esfuerzos en la resolución de los problemas. Por tanto, su objetivo es ayudar al alumno cuando por sí mismo no puede resolver el problema y necesita de apoyo externo y su estructura y contenido es el siguiente:

Guía didáctica del estudiante para la resolución de problemas de Matemática.

• Para analizar el enunciado:

Después de la lectura cuidadosa del enunciado, debes preguntarte:

1. ¿ Cuáles son los elementos del problema que más te han llamado la atención?.
2. ¿ Has comprendido todas las palabras del enunciado del problema?.
3. ¿ Lo puedes relacionar con algún concepto, disciplina, experiencia, situación o problema anterior?.
4. ¿ Puedes expresar de qué trata el problema?.
5. ¿ Debes repetir la lectura del enunciado del problema para comprenderlo?. ¿ Puedes precisar los elementos del mismo que te generan dificultad en su comprensión?.
6. ¿ Qué se pide hallar o ya conoces la demanda de la tarea?. ¿ Se trata de obtener una cosa o varias?.
7. ¿ Qué datos puedes extraer del problema?.
8. ¿ Consideras que los datos del problema son suficientes para resolverlo, están de acuerdo con los que has manejado en alguna experiencia previa?.
9. ¿ Existe alguna relación entre estos datos?.
10. ¿ Puedes representar estos datos o la situación que se te presenta a través de un gráfico, tabla, etc., que te ayude a resolverlo?.
11. ¿ Consideras que necesitas para resolver el problema algún dato que no aparece en el mismo?.
12. ¿ Qué conocimientos matemáticos o de otras disciplinas consideras convenientes para resolver el problema?.
13. ¿ Conoces algún algoritmo o estrategia para resolver el problema?.
14. Por último, piensa de otra forma o escribe de otra forma el problema, para facilitarte el que puedas comprenderlo.

• Para generar y diseñar el plan:

1. Analizado el problema, ¿ Consideras que puedes resolverlo?.
2. ¿ Has resuelto este problema o alguno muy similar con anterioridad?.
3. ¿ Podrías determinar de qué tipo de los estudiados es este problema?.
4. En caso de ser afirmativa la respuesta anterior, ¿ Qué relación puedes establecer entre ellos?. ¿ Cuáles son los elementos que los

diferencian?. ¿ Te puede facilitar o servir esta relación para resolverlo?. ¿ Puedes auxiliarte en los mismos razonamientos o necesitas considerar algún cambio para obtener su solución?.

5. En caso de ser diferentes, entonces debes considerar: volver sobre tus pasos a las preguntas iniciales y, continuar con las valoraciones siguientes:
 6. De las partes que consideras más fáciles. ¿Podrías resolver alguna parte intermedia, u otra parte?.
 7. Trata de representarte una situación similar a la del problema para posibilitar que pueda surgir alguna idea para la solución o trata si es posible de expresarla cuantitativamente y retoma las ideas gráficas. Todos estos elementos analizados con profundidad, en ocasiones pueden sugerir un camino de solución.
 8. ¿ Conoces algún teorema, fórmula, propiedad, algoritmo que relacione todos los datos?.
 9. Recorre las ideas del problema retrospectivamente, suprime lo que te parece innecesario a los datos, en busca de alguna idea.
 10. Si llegas a concluir que no puedes resolver el problema, entonces cuestionate: puedes probar un nuevo intento de resolución, concluyes que los datos o situación del problema son contradictorios, carentes de sentido o difíciles de comprender. En resumen, está fuera de tus posibilidades resolverlo. Entonces, agotados estos recursos, se debe recurrir a algún compañero, material didáctico, libro de texto o al profesor en busca de orientación. En estos casos es recomendable que compares las limitaciones que se te presentaron, con las ideas o sugerencias que incorporaste a partir de las sugerencias que se te plantearon.
- **Para ejecutar el plan:**
 1. Antes de iniciar la resolución del problema, revisa nuevamente los datos, las unidades en que están expresados y los conceptos, ideas, estrategias, modelo que aplicarás. Trata de superar las dificultades que puedan aparecer.
 2. Si te encuentras alguna dificultad, regresa al principio de la situación, rectifica los posibles errores e intenta de nuevo.
 3. Si te encuentras con situaciones muy difíciles, valora otra vía de solución, o si se requiere de un dato adicional para continuar.
 4. Si consideras por terminada la tarea de solución del problema, revisa nuevamente todos los elementos considerados en su solución, antes de pasar a validar la respuesta obtenida.
 - **Para revisar y evaluar la ejecución:**
 1. Cuando consideres concluido el problema, nunca te plantees definitivamente que todo esta correcto. Recorre antes todo el proceso, cerciorándote paso a paso de que no cometiste errores.
 2. Escribe ordenadamente y con claridad todo el proceso de resolución seguido, destaca entre cuadros o subraya lo que consideres más importante, partiendo del enunciado comprueba que la respuesta obtenida es la que se te pide, para esto:

3. Valora si la solución del problema es lógicamente posible, es decir, si tiene sentido en el contexto del problema.
4. Añade a la solución del problema una explicación literal breve que indique lo que has hallado.
5. Valora si es posible obtener otro resultado o solución, si se puede resolver de otra forma o con un enfoque más general.
6. Intenta explicar el problema a otra persona.
7. Utiliza la experiencia y conocimientos adquiridos en el planteamiento y solución de nuevos problemas.

- **La resolución de problemas y la organización de situaciones didácticas que faciliten la utilización del pensamiento reflexivo del estudiante.**

Para lograr que las diferentes acciones que supone enfrentar el proceso de resolución de problemas de Matemática tengan un efecto duradero es necesario que los estudiantes constaten con toda claridad lo aprendido concretamente. Para ello resulta importante la reflexión habitual en el aula sobre el trabajo realizado, pero también es conveniente realizar actividades consistentes en que cada alumno reflexione sobre lo que se ha aprendido al final de cada tema, comparándolo con el punto de partida, explorar en los diferentes pasos realizados, comprobar cual ha sido su participación en las tareas, así como los aportes que han sido posibles desde el trabajo en grupo o con la ayuda del profesor, es decir, que aprendiera de las experiencias matemáticas reflexionando sobre lo realizado. De esta forma los estudiantes conocen qué es lo que han hecho correctamente, qué es lo que han hecho incorrectamente y cómo pueden superarlo.

A partir de esta concepción, se derivan una serie de acciones metodológicas que ayudan a plantear y resolver los problemas.

Entre estas acciones son particularmente importantes aquellas que favorecen el pensamiento generalizador, crítico y reflexivo, las que facilitan la emisión de preguntas y sugerencias, propician el análisis de la información, el debate de las ideas, etc.

Lo anterior constituye un argumento a favor de la necesidad de que se promuevan a través del proceso de enseñanza-aprendizaje los espacios para que los estudiantes puedan reflexionar. Esto se debe tener en cuenta a la hora de planificar las secuencias de actividades y su desarrollo temporal y por supuesto al seleccionar los problemas.

Así, de modo general algunas de las **acciones que promueven la reflexión** individual y colectiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje son:

- Se proporciona al estudiante la orientación que necesita sobre el proceso de resolución de problemas de Matemática, realizándose una labor de ayuda dirigida más a hacer preguntas y fomentar en los alumnos el hábito de preguntarse, que a dar respuestas a sus preguntas.
- Se analizan los enunciados de los problemas en grupo y en caso de ser necesario se redactan de otra manera, lo que resulta muy eficaz para la elaboración de nuevos enunciados o al estructurar un enunciado a partir de los datos, lo que simultáneamente da la posibilidad al docente de reflexionar sobre "su enunciado". Además, modificar el formato de los problemas, en ocasiones, con los estudiantes, evita que el alumno identifique una forma de presentación con determinado tipo de problema.

- Se plantean tareas abiertas que admitan varias propuestas de solución.
- Se diversifican los contextos planteando tareas que vinculen al estudiante con su futura práctica profesional y con otras disciplinas del currículum. Igualmente, se propicia que el estudiante trabaje los mismos tipos de problemas en distintos momentos y con diferentes grados de dificultad, lo que favorece la generalización y facilita la aplicación de los conocimientos en nuevos problemas.
- Se estimula a los estudiantes para que planifiquen varias estrategias de solución antes de optar por una de ellas.
- Se trata de habituar al alumno a adoptar sus propias decisiones sobre el proceso de resolución, concediéndoles una independencia creciente en el proceso de toma de decisiones.
- Se fomenta la cooperación entre los estudiantes en la realización de las tareas, pero también se incentivan los puntos de vista diversos, que obligan a explorar el problema, confrontar soluciones y vías de solución alternativas y ser críticos de sus propias ideas, hasta que la situación lo exija.
- Se trata de motivar a los estudiantes para que no se detengan cuando el proceso de resolución se viera impedido, regresando sobre sus pasos y reconsiderando la vía de solución.
- Se concede un tiempo al estudiante cuando se concluya la tarea para pensar sobre lo realizado, profundizando en los momentos claves del proceso de resolución.
- Se facilita que el estudiante valore cuál ha sido su participación en las tareas, la ayuda aportada por el profesor, así como las contribuciones que habían sido posibles desde el trabajo en grupo.
- Y otras

Lo anterior indica que desde el punto de vista del autor, la apropiación de conocimientos y procedimientos matemáticos requieren; primero, de la actividad del sujeto; y segundo, de un proceso de reflexión del sujeto sobre su propia actividad.

Esta línea central de trabajo se recomienda enmarcarla en un contexto de enseñanza definido por un conjunto de actividades, experiencias y situaciones que se seleccionan por su potencial educativo y sustenten un conjunto de principios orientadores sobre la resolución de problemas de Matemática cuya estructura cognitiva permita a los estudiantes generar reflexión y juzgar sus propias formas de actuar.

Conclusiones.

Decir o escribir algo sobre lo que se considera contribuye a la enseñanza y el aprendizaje de problemas de Matemática resulta extremadamente difícil, es obvio que aún quedan otras muchas cuestiones por plantear o investigar sobre esta cuestión y que el éxito en la resolución de problemas de Matemática depende en gran medida de diversas variables que abarcan tanto al problema en sí, como al resolutor, al docente, al contexto de realización de las tareas, las estrategias, etc.

Al mismo tiempo, el análisis realizado ha puesto de manifiesto la responsabilidad que tenemos los docentes al introducir los cambios en el proceso de enseñar y aprender a resolver problemas en las clases de Matemática, las necesidades y exigencias del aula pasan a través de la creatividad constante del profesor.

Bibliografía.

1. Alonso, I. (2001): La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. Resumen de Tesis de Doctorado, Santiago de Cuba.
2. Bransford, J.D. y B.S. Stein (1988): Solución ideal de problemas. Editorial Labor, Barcelona. España.
3. Campistrous, L. y C. Rizo. (1996): Aprende a resolver problemas aritméticos. Proyecto TEDI. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
4. Carballal, E. y C. Díaz (1990): Técnicas del proceso de las decisiones. Ediciones ENPES.
5. Chrobak, R. (1998): Metodologías para lograr aprendizaje significativo. Imprenta Universitaria "Malvinas Argentinas". Argentina.
6. de Guzmán, M. (1993): Tendencias innovadoras en Educación Matemática. EDIPUBLI S.A., Argentina.
7. Delgado, R. (1998): La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del contenido y el desarrollo de habilidades generales matemáticas. Tesis de Doctorado, La Habana.
8. Garret, R.M. (1995): Resolver problemas en la enseñanza de las Ciencias. Alambique. Monografía. La resolución de problemas. No.5. Año II. Julio, Barcelona. España, pp. 6-15.
9. Gil, D. et al. (1991): La enseñanza de las Ciencias en la Educación Secundaria. Editorial Horsori. Barcelona.
10. Jungk, W. (1979): Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2. Editorial de libros para la Educación, La Habana.
11. Krinitski, N. (1988): Algoritmos a nuestro alrededor. MIR, Moscú.
12. Labarrere, A.F. (1987): Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
13. Labarrere, A.F. (1996): Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
14. Landa, L.N. (1978): Algoritmos para la enseñanza y el aprendizaje. Editorial Trillas, México.
15. Llivina, M.J. (1999): Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos. Tesis de Doctorado, La Habana.
16. Mason, J. et al. (1989): Pensar matemáticamente. Editorial Labor, España.
17. Newell, A. and H.A Simon (1972): Human problem solving. Printice-Hall.
18. Perales, J.F. (2000): Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales. Editorial Marfil. Colección Ciencias de la Educación, España.
19. Polya, G. (1989): Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas, México.
20. Pozo, J.I. et al. (1994): La solución de problemas. Santillana. Aula XXI. Madrid.
21. Sánchez, M. (1995): Desarrollo de habilidades del pensamiento. Razonamiento verbal y solución de problemas. Editorial Trillas, México.
22. Schoenfeld, A. H. (1985): Mathematical Problems Solving, Academic Press.

23. Stewart, J. (1998): Cálculo. Conceptos y contextos. International Thomson Editores, México.