LOS ELEMENTOS HEURÍSTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

Dr. Reinaldo Hernández Camacho.
Profesor Titular de Matemática de la Universidad de Matanzas.
Doctor en Ciencias Pedagógicas.

Matanzas, 2004.

LOS ELEMENTOS HEURÍSTICOS Y LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

INTRODUCCIÓN.

Existen muchas definiciones de lo que se entiende por un problema matemático. Lo que para algunos autores es un problema matemático, puede que no lo sea para otros. Esto significa que hasta el momento, no sea éste un concepto definitivo con precisión. Y no porque existan diferentes definiciones, porque en fin de cuentas, el contenido de un concepto no tiene que ser siempre igual, pero lo que sí tiene que permanecer inalterable, en cada una de las definiciones que se emitan de un concepto que esté bien definido es la extensión del concepto, y sucede que para las diferentes definiciones que se dan de problema matemático, la igualdad entre las extensiones no se cumple siempre con exactitud. Esto trae como consecuencia que cada vez que un autor va a realizar un trabajo relacionado con problemas matemáticos, se vea en la necesidad de expresar cuál es la definición que él asume de un problema matemático. No sucede así cuando se requiere utilizar otros conceptos matemáticos, como por ejemplo: rectángulo, triángulo, función, límite, derivada, etc.; para los cuales existen definiciones matemáticas precisas.

En este trabajo se adoptará la siguiente definición:

PROBLEMA MATEMÁTICO:

Es una situación que se desea resolver, que puede estar relacionada con objetos matemáticos o no matemáticos, y que se caracteriza por:

- Para resolver la situación es necesario utilizar objetos matemáticos.
- Existe un estado inicial de la situación sin resolver; y un estado final donde se considera resuelta.
- Los objetos matemáticos a utilizar, o la forma de utilizarlos, o ambas cosas (la vía de solución), son desconocidos.

ETAPAS EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO.

Hay variedad también en cuanto a las etapas que proponen diferentes autores en la solución de un problema matemático. No obstante, en la mayoría de las propuestas está presente la que hizo ese admirable pedagogo que se nombró George Polya. En algunos casos se han subdividido algunas de las etapas propuestas por Polya y en otros casos se han hecho ligeras variaciones.

Las etapas que propuso Polya son las siguientes:

1. Comprender el problema.
2. Captar las relaciones que existen entre los diversos elementos. Ver lo que liga la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan.
3. Poner en ejecución el plan.
4. Volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla.

En realidad, lo que suele resultar difícil, en el proceso de resolución de un problema, es hallar la idea que conduzca a obtener la solución del mismo. Polya proponía la formulación de tres preguntas iniciales para tratar de encontrar esa idea:
¿ Cuál es la incógnita?. ¿ Cuáles son los datos?. ¿Cuál es la condición?.

Y añadía Polya la sugerencia de mirar bien la incógnita y pensar en algún problema que resulte familiar y que tenga *la* misma incógnita o una similar al problema que se está tratando de resolver.

LOS ELEMENTOS HEURÍSTICOS.

Una forma exacta de proceder, que conduzca siempre a la solución de cualquier tipo de problema matemático, no existe, o al menos no ha sido descubierta hasta el momento. Pero sí se han elaborado indicaciones generales, que permiten guiar en alguna medida, a las personas que estén tratando de resolver un problema. Estas indicaciones están contenidas en lo que se suele llamar elementos heurísticos.
Los elementos heurísticos pueden clasificarse en medios auxiliares heurísticos y procedimientos heurísticos, y dentro de estos últimos están los principios, las reglas y las estrategias heurísticas.

MEDIOS AUXILIARES HEURÍSTICOS.

Entre los más importantes se encuentran:

- Las figuras auxiliares ilustrativas o de análisis.
- Las tablas para reflejar relaciones entre datos.
- Gráficos.
- Resúmenes de definiciones, teoremas, propiedades y procedimientos.

LOS PRINCIPIOS HEURÍSTICOS.

Constituyen formas generales de encauzar el proceso de razonamiento, durante la resolución de problemas matemáticos o en la elaboración de nuevos contenidos.
Los más utilizados son:

- La analogía.
- La inducción.
- La generalización.
- Medir y probar.
- La movilidad.
- Consideración de casos especiales o casos límites.
- La reducción.

El principio de **analogía** se basa en el establecimiento de semejanzas en el contenido o en la forma entre diferentes objetos o situaciones.

El principio de **inducción** consiste en el análisis de un conjunto de casos particulares, a partir de cuyos resultados se obtienen suposiciones generales.

En el principio de **generalización** a partir del análisis de un objeto o situación en particular se obtienen suposiciones generales.
Algunos autores unifican los principios de inducción y de generalización en un sólo principio.

El principio de **medir y probar**, como su nombre lo indica, consiste en realizar mediciones en casos particulares para obtener una suposición general.

El principio de **la movilidad** se fundamenta en suponer que un elemento dado puede moverse a diferentes posiciones, para analizar los resultados que se producen durante ese movimiento.

En el principio de **consideración de casos especiales y casos límites**, dentro de un conjunto de casos posibles, se elige uno, que como consecuencia de sus características particulares, provoca a su vez resultados especiales.

El principio de **reducción** consiste en realizar alguna variación en el problema por resolver que permite transformarlo en otro ya conocido.

Durante sus aplicaciones es frecuente que estos principios aparezcan interrelacionados, aunque alguno de ellos predomine en un momento dado.

LAS REGLAS HEURÍSTICAS.

Representan impulsos que provoca el profesor en los estudiantes mediante observaciones, preguntas y recomendaciones, que ayudan a éstos a orientarse en la búsqueda de la solución del problema.

LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS.

Son los sentidos de orientación que pueden seguirse en el razonamiento para conectar los datos con la solución durante el proceso de resolución de un problema.

Aunque algunos autores mencionan también otras, las más usadas son:

- El trabajo hacia adelante o método sintético.
- El trabajo hacia atrás o método analítico.

En el trabajo hacia adelante el razonamiento para obtener la solución parte de los datos y a partir de ellos se busca la vía que conduzca a la solución.

En el trabajo hacia atrás el razonamiento parte de la solución. Se busca un primer resultado intermedio que conduzca a la solución, después un segundo resultado intermedio que conduzca al primero, y así sucesivamente hasta llegar a los datos. Después se puede hacer el recorrido de forma inversa: de los datos a la solución.

A continuación se presentarán algunos ejemplos de aplicación de los principios heurísticos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE GENERALIZACIÓN.

Un hombre tomó cierto número de naranjas de un naranjal. Para salir del naranjal, el hombre tuvo que pasar por siete puntos de control. Cada vez que pasaba por uno de esos puntos, tenía que dejar la mitad de las naranjas que tuviera en ese momento más media naranja. Al final, después de pasar por los siete puntos de control, el hombre salió con una sola naranja. ¿Cuántas naranjas tomó el hombre inicialmente del naranjal?

SOLUCIÓN:

Resolver este problema mediante el planteamiento y solución de una ecuación puede resultar bastante trabajoso. Sin embargo, si se emplea un razonamiento hacia atrás (aunque no es precisamente la estrategia heurística de trabajo hacia atrás, porque aquí no se parte de la solución), puede resolverse el problema de una forma más sencilla.

El razonamiento que se hará está basado en la determinación de la cantidad de naranjas que tenía el hombre al llegar a cada uno de los puntos de control, conociendo con cuántas naranjas iba saliendo posteriormente de cada uno de esos puntos.

Al final (al salir del punto de control número 7), se quedó con una sola naranja y lo último que había hecho antes fue entregar media naranja. Luego, antes de hacer esta última operación tenía 1 naranja y media. Lo que hizo antes de quedarse con esa naranja y media, fue entregar la mitad de las naranjas que tenía, por lo que antes de realizar esa otra operación tenia el doble de esa cantidad; es decir, tenia 3 naranjas al momento de arribar al séptimo y último punto de control (pero aún sin pasar por él). Esto es: $(1+\frac{1}{2}).2=2.(1)+1=3$

Significa que salió del penúltimo y sexto punto de control con tres naranjas. Entonces, generalizando el procedimiento anterior, puede deducirse que, al momento de llegar a ese sexto punto (antes de pasar por él), la cantidad de naranjas que tenía era: $(3+\frac{1}{2}).2=2.(3)+1=7$

Siguiendo ese mismo razonamiento hacia atrás, se puede obtener la solución del problema de la manera siguiente:

Punto de Control. naranjas	**Cantidad de naranjas con que salió de él.**	**Cantidad de con que llegó a él.**
7mo	1	3
6to	3	7
5to	7	15
4to	15	31
3ro	31	63
2do	63	127
1ro	127	255

El hombre tomó, inicialmente, 255 naranjas del naranjal.

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE ANALOGÍA.

Ocho hombres pueden hacer una obra en 30 días. ¿Cuántos hombres se necesitan para hacer la obra en 12 días?. (Suponiendo que todos los hombres rindan igual).

SOLUCIÓN:

Si un estudiante no ha resuelto ningún problema de este tipo y está presentando dificultad para determinar la solución de éste, se le puede plantear otro problema análogo al anterior. Por ejemplo:

Una bicicleta que va a una velocidad constante de 8 km/h, necesita 30h para recorrer la distancia que hay entre 2 ciudades. ¿A qué velocidad constante tendría que ir la bicicleta para hacer el trayecto en 12 horas?

Este nuevo problema debe resultar más familiar para el estudiante. Seguramente se percatará de que, si determina la distancia existente entre las dos ciudades, puede resolver el problema con facilidad.

d = v. t
d = 8 km/h . 30h = 240 km.
La distancia entre las dos ciudades es de 240 km.

Ahora se puede determinar fácilmente la velocidad necesaria para realizar el recorrido en 12 horas.
$v = \frac{d}{t} = \frac{240km}{12h} = 20km / h.$
Para hacer el recorrido en 12 horas la bicicleta debe ir a una velocidad constante de 20km/h.

Puede instarse ahora al estudiante a que establezca una analogía entre ambos problemas. Es posible razonar el primer problema de la manera siguiente:
Si 8 hombres pueden hacer la obra en 30 días, es porque se necesita realizar en total: 8.30=240 jornadas de trabajo de un hombre. Si se quiere hacer la obra en 12 días, entonces la cantidad necesaria de hombres por día es de: $\frac{240}{12}$ =20 hombres por día.

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE MEDIR Y PROBAR.

En la clase anterior a la que se utilizará para introducir el teorema de Pitágoras, se le entrega a los estudiantes una hoja mimeografiada que contenga tres triángulos rectángulos, pidiéndosele a los estudiantes que hagan lo siguiente con cada uno de los triángulos:

a) Medir la longitud de cada uno de los tres lados del triángulo.
b) Hallar el cuadrado de cada una de las tres longitudes.

c) Tratar de encontrar alguna relación que pueda existir entre esos tres cuadrados obtenidos.

Entonces, al inicio de la clase donde se introduce el teorema de Pitágoras, se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes en la realización de la tarea asignada, poniéndose en evidencia, al menos de forma aproximada, la relación que se plantea en el teorema de Pitágoras, la cual será formalizada por parte del profesor.

OTRO EJEMPLO.

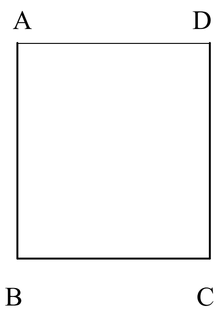
Una estrategia similar a la anterior se puede utilizar para introducir la ley de los senos, si se le entrega a cada estudiante una hoja mimeografiada que contenga tres triángulos, y se les orienta realizar lo siguiente con cada uno de ellos:

- Medir las longitudes de sus tres lados: a, b, c.
- Medir las amplitudes de sus tres ángulos: □, ß, □.
- Hallar mediante una tabla: sen □, sen ß, sen □.
- Calcular el cociente entre el seno de cada ángulo y la longitud del lado opuesto al ángulo, respectivamente.
- Comparar los tres cocientes obtenidos para cada triángulo.

De estos resultados se puede inferir la ley de los senos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE REDUCCIÓN.

En la figura siguiente, ABCD es un rectángulo. Haciendo girar el triángulo ACD alrededor del lado AB se engendra un sólido. ¿Cuál es el volumen de ese sólido si AD=4 cm y DC=10 cm?.



SOLUCIÓN:

A primera vista pudiera parecer que el volumen del sólido indicado es la mitad del volumen del sólido engendrado cuando se hace girar el rectángulo ABCD alrededor del lado AB, pero eso no es cierto.
Al girar alrededor del lado AB, los triángulos ABC y ACD, en la posición en que se encuentran, no engendran ambos cuerpos con iguales volúmenes, a pesar de que los dos triángulos tienen igual área.
El volumen que se pide calcular puede determinarse como la diferencia de dos volúmenes: el volumen del sólido engendrado por el rectángulo ABCD y el del sólido engendrado por el triángulo ABC. En el primer caso el sólido engendrado es un cilindro circular recto y en el segundo caso es un cono

circular recto. Con esto, el problema planteado se reduce a la solución de otros problemas ya conocidos.
Llamando:
Vp: Volumen pedido.
Vci: Volumen del cilindro circular recto.
Vco: Volumen del cono circular recto.

Vp = Vci-Vco

$Vp = \pi r^2h - \frac{1}{3}\pi r^2h$

$Vp = \frac{2}{3}\pi r^2h$

$Vp \approx \frac{2}{3}. 3,14. 16.10$

$Vp \approx 335,04$

El volumen del sólido es aproximadamente de 335,04 cm^3

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE CONSIDERACIÓN DE CASOS ESPECIALES O CASOS LÍMITES.

Una de las reglas de derivación, plantea que si f y g son funciones derivables en x y $g(x)\neq 0$, entonces:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^! = \frac{f^!(x).g(x) - f(x).g^!(x)}{[g(x)]^2}$$

Una vez que se le ha dado a conocer esta regla a los estudiantes, se le puede plantear la siguiente interrogante: ¿Qué resultado se obtendrá de esta fórmula en el caso particular en que f(x)=1?.

RESPUESTA:

Como la derivada de una constante es cero, se obtiene otra regla muy útil en la práctica, como un caso especial de la anterior:

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]^! = \frac{-g^!(x)}{[g(x)]^2}$$

OTROS EJEMPLOS.

a) La Ley de los cosenos de la geometría plana plantea que:
En un triángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el duplo del producto de las longitudes de estos lados por el coseno del ángulo comprendido.

Por ejemplo, si las longitudes de los lados del triángulo son a, b y c, y δ es la amplitud del ángulo opuesto al lado c, entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\delta$$

¿Qué sucede con esta fórmula en el caso particular en que $\delta = 90^0$; es decir, en el caso en que el triángulo sea rectángulo?

<u>RESPUESTA:</u>

Como $\cos 90^0 = 0$, se obtiene como caso especial el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

b) La ecuación de una elipse en un plano XY, con centro en el origen de coordenadas, puede expresarse como:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a y b son las longitudes de los semiejes.

¿Qué resultado se obtiene de esta fórmula cuando a=b?.

<u>RESPUESTA:</u>

Cuando a=b, se obtiene como caso especial la ecuación de una circunferencia:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

c) Un ortoedro en el que las longitudes de sus aristas son a, b y c , tiene como volumen y como área total, respectivamente:

$$V = a.b.c$$
$$At = 2ab + 2ac + 2bc$$

¿Qué fórmulas especiales pueden obtenerse para el volumen y el área total de un cubo?.

<u>RESPUESTA:</u>

El cubo es un caso particular del ortoedro, donde a=b=c, por lo que se obtienen las fórmulas especiales siguientes:

$$V = a^3$$
$$At = 6\,a^2$$

d) Un trapecio en el que la longitud de su altura es h y las longitudes de sus bases mayor y menor son B y b respectivamente, tiene como área:

$$A = \frac{(B+b).h}{2}$$

¿En qué figura geométrica se convertiría el trapecio si b =0 y cuál sería la fórmula para calcular su área?

RESPUESTA:

Si b=0 se obtendría un triángulo como caso límite de un trapecio y la fórmula para calcular el área sería:

$$A = \frac{B.h}{2}$$

e) La fórmula para calcular el volumen de una pirámide recta truncada de base cuadrada es:

$$V = \frac{\left(a^2 + ab + b^2\right)}{3}.h$$

donde a es la longitud del lado de la base cuadrada inferior, b es la longitud del lado de la base cuadrada superior y h es la longitud de la altura.
¿Qué sucede en los casos particulares en que b=a y en que b=0?.

RESPUESTAS:

-Si b=a se trata de un prisma y la fórmula para calcular el volumen se transforma en:

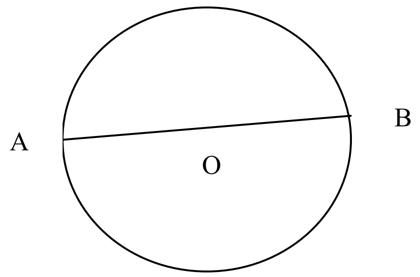
$$V = a^2.\ h$$

-Si b=0 se obtiene una pirámide como caso límite de la pirámide truncada y la fórmula para calcular el volumen se convierte en:

$$V = \frac{1}{3}a^2.h$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LA MOVILIDAD.

Se desea elaborar, con los estudiantes, el teorema relativo a la amplitud del ángulo inscripto en el diámetro de una circunferencia. Para ello se traza en el pizarrón y se le orienta a los estudiantes que lo hagan también en sus libretas, una circunferencia con su centro O y un diámetro AB.



Se sitúa un punto C sobre la circunferencia, se trazan los segmentos AC y BC y se mide la amplitud del ángulo ACB.
Después, se va moviendo el punto C por la circunferencia y se van midiendo las amplitudes de los diferentes ángulos ACB que van surgiendo. De esta manera se puede concluir que, el ángulo inscripto en el diámetro de una circunferencia tiene una amplitud de 90^0.

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN.

Cuando uno de los barcos que habían salido de España, bajo el mando de Magallanes, terminó de darle la vuelta a la tierra, sus tripulantes se sorprendieron al comprobar que el calendario que ellos poseían tenia un día de atraso con respecto al calendario existente en tierra firme española. Esa diferencia se produjo porque los marineros habían estado navegando en sentido inverso al movimiento de rotación de la Tierra y al dar la vuelta completa a nuestro planeta tuvieron un día solar menos que los que transcurrieron en España. Para ellos, cada vez que salía el sol era un día diferente, por lo que contaban sus días por los días solares. Esto trajo como consecuencia que sus días; o sea, los días solares de los navegantes, fueran, como promedio, ligeramente superiores a 24 horas.

¿Es posible encontrar una fórmula que exprese la duración de los días solares de una persona, que le esté dando la vuelta a la Tierra, conociendo la velocidad de rotación de la persona con respecto a la velocidad de rotación de la Tierra; es decir, dando la velocidad de rotación de la persona en comparación con la velocidad de rotación de la Tierra?.

SOLUCIÓN:

Para obtener la solución de este problema, se utilizará el principio heurístico de inducción. Se determinará la duración del día solar para algunos casos particulares de velocidades de rotación de la persona y posteriormente, mediante generalización, se obtendrá la fórmula deseada.

Se asumirá como sentido positivo de rotación el mismo que siguieron Magallanes y sus compañeros; o sea, el opuesto al sentido de rotación de la Tierra. Al establecer la comparación entre las velocidades de rotación de la persona y de la Tierra, durante el proceso de obtención de la fórmula, se trabajará con los valores absolutos y no con los signos. Cuando sea necesario, el signo quedará establecido por el sentido de rotación.

CASO PARTICULAR 1.

La persona viaja (idealmente) alrededor de la Tierra con una velocidad de rotación igual a la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso al movimiento de rotación de ésta.

SOLUCIÓN:

La persona se mantiene siempre en el mismo horario solar. Al estar girando con igual velocidad de rotación que la Tierra y en sentido inverso, su posición no cambia con relación al Sol.

No es lógico, entonces, hablar de la duración del día solar, porque en realidad no existe día solar para esa persona. No transita por los diferentes horarios solares.

Demora 1 día de 24 horas en dar la vuelta a la Tierra.

CASO PARTICULAR 2.

La persona viaja alrededor de la Tierra con una velocidad de rotación igual a la mitad de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso.

SOLUCIÓN:

Demora dos días de 24 horas en darle la vuelta a la Tierra, mientras que, para la persona, durante ese tiempo sólo habrá transcurrido un día solar. Sus días solares serán entonces de 48 horas.

CASO PARTICULAR 3.

La persona viaja alrededor de la Tierra con una velocidad de rotación igual a la cuarta parte de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso.

SOLUCIÓN:

Demora 4 días de 24 horas en darle la vuelta a la Tierra.
Cuando la Tierra da una vuelta completa (un día de 24 horas), la persona sólo ha dado $\frac{1}{4}$ de vuelta alrededor de la Tierra y han transcurrido las $\frac{3}{4}$ partes de su día solar (pues sólo se ha retrasado en $\frac{1}{4}$ de vuelta con relación a los puntos fijos sobre la superficie terrestre).
Si se denota por x la duración del día solar, en días de 24 horas, se obtiene que:

$$\frac{3}{4}x = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

La duración de su día solar es de $\frac{4}{3}$ días de 24 horas; o sea, de 32 horas.

CASO PARTICULAR 4.

La persona viaja alrededor de la Tierra con una velocidad de rotación igual a la octava parte de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso.

SOLUCIÓN:

Demora 8 días en dar la vuelta a la Tierra.
Cuando la Tierra da una vuelta completa (un día de 24 horas), la persona ha dado $\frac{1}{8}$ de la vuelta a la Tierra y han transcurrido las $\frac{7}{8}$ partes de su día solar. Entonces, denotando por x la duración de su día solar, en días de 24 horas:

$$\frac{7}{8}x = 1 \Rightarrow x = \frac{8}{7}$$

La duración de su día solar es de $\frac{8}{7}$ días de 24 horas, lo que equivale, aproximadamente, a 27,4 horas.

CASO PARTICULAR 5.

La persona viaja alrededor de la Tierra, con una velocidad de rotación igual a las $\frac{3}{4}$ partes de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso.

SOLUCIÓN:

Demora $\frac{4}{3}$ días de 24 horas en dar la vuelta a la Tierra.

Cuando la Tierra da una vuelta completa (un día de 24 horas), la persona ha dado $\frac{3}{4}$ partes de la vuelta a la Tierra en sentido inverso. Como la velocidad de rotación de la Tierra es mayor en valor absoluto, esto provoca que la persona haya rotado $\frac{1}{4}$ de su día solar en el mismo sentido de rotación de la Tierra.

Si x es el tiempo de duración de su día solar, en días de 24 horas, entonces:

$\frac{1}{4}$ x =1 $\Rightarrow$ x = 4

Sus días solares serán de 4 días de 24 horas.

RESUMEN:

Puede hacerse ahora un resumen de los resultados obtenidos en los casos particulares analizados.

Velocidad de rotación de la persona en sentido inverso al de la rotación de la Tierra.	Tiempo en dar una vuelta a la Tierra, en días de 24 horas.	Duración del día solar, en días de 24 horas.
$\frac{1}{8}$ del valor de la velocidad de rotación de la Tierra.	8 días.	$\frac{8}{7}$ días≈27,4 horas
$\frac{1}{4}$ del valor de la velocidad de rotación de la Tierra.	4 días.	$\frac{4}{3}$ días = 32 horas
$\frac{1}{2}$ del valor de la velocidad de rotación de la Tierra.	2 días	2 días = 48 horas
$\frac{3}{4}$ del valor de la velocidad de rotación de	$\frac{4}{3}$ días	4 días = 96 horas

la Tierra.		
1 del valor de la velocidad de rotación de la tierra.	1 día	No hay día solar. La persona se mantiene en el mismo horario solar.

GENERALIZACIÓN: OBTENCIÓN DE LA FÓRMULA.

Observando los resultados que se reflejan en la tabla anterior, es posible arribar a las siguientes conclusiones:

a) Si se denota por x la cantidad de días que la persona se demora en dar una vuelta a la Tierra, en sentido inverso al movimiento de rotación de ésta, entonces, la velocidad de rotación de la persona será $\frac{1}{x}$ veces el valor absoluto de la velocidad de rotación de la Tierra y sus días solares serán de $\frac{x}{x-1}$ días de 24 horas, con $x\neq 1$.

$$Ts = \frac{x}{x-1}$$

b) Por otra parte, si se denota por x la velocidad de rotación de la persona, en sentido inverso a la velocidad de rotación de la Tierra, los días que demora la persona en dar la vuelta a la Tierra serán de $\frac{1}{x}$ y la duración del día solar será de $\frac{1}{1-x}$ días de 24 horas, con $x\neq 1$. Esto puede obtenerse de la fórmula anterior; es decir, de $\frac{x}{x-1}$, sustituyendo la x por $\frac{1}{x}$.

ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA SOLUCIÓN.

Polya recomendaba que después de obtener la solución de un problema, se hiciera una valoración retrospectiva de la misma. Aquí resulta interesante hacer algunas reflexiones relacionadas con la fórmula obtenida.

1. Sea Ts el tiempo de duración del día solar, en días de 24 horas. Según la primera fórmula: Ts = $\frac{x}{x-1}$ días, siendo x los días que se demora la persona en dar una vuelta a la Tierra en sentido inverso al movimiento de rotación de ésta.

a) Obsérvese que Ts = $\frac{x}{x-1}$ no está definida para x=1, tal como se puso de manifiesto en el análisis del caso particular 1.
b) Si x tiende a 1, pero es diferente de 1, entonces Ts tiende a infinitivo. Es decir, si la velocidad de rotación de la persona esta próxima al valor absoluto de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido

contrario, la duración de su día solar se hace muy grande, porque al transcurrir un día de 24 horas, su horario solar varia muy poco.

c) Si x tiende a infinito, Ts tiende a 1. O sea, si la cantidad de días en dar una vuelta a la tierra es muy grande, el día solar es aproximadamente igual a un día de 24 horas.

Estos resultados son muy ilustrativos para apreciar la aplicación del concepto de límite en situaciones prácticas.

2. Si la velocidad de rotación de la persona fuera el doble en valor absoluto de la velocidad de rotación de la Tierra y en sentido inverso, demoraría $\frac{1}{2}$ día (12 horas) en dar la vuelta a la Tierra. Su día solar sería de 24 horas, pero estaría recorriendo el horario solar en sentido inverso al sentido normal del horario, (sus horas solares irían disminuyendo).
Para este caso la fórmula obtenida anteriormente es válida y daría:

Ts = $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}$ = -1, que puede interpretarse, por el signo negativo del 1, como que el día solar es de 24 horas, pero recorrido en sentido antihorario.

3. Si la velocidad de rotación de la persona fuera igual a la velocidad de rotación de la Tierra y en el mismo sentido que ésta, la persona daría la vuelta a la Tierra en un día de 24 horas y sus días solares serían de 12 horas; es decir, de $\frac{1}{2}$ día.

Para obtener esta solución aplicando la fórmula Ts = $\frac{x}{x-1}$, hay que considerar que x=-1, porque el sentido de rotación, en este caso, es el opuesto al sentido que se adoptó como positivo en la fórmula.

Entonces, Ts = $\frac{-1}{-1-1}$ = $\frac{-1}{-2}$ = $\frac{1}{2}$ tal como debía ser.

4. Si lo que se conoce es la velocidad lineal de la persona alrededor de la tierra y se quiere determinar la duración de su día solar, es necesario conocer además la dirección y el sentido en el cual se desplaza la persona. Por ejemplo:

a) Si la persona se mueve por la superficie de la tierra o del mar, en la misma dirección de alguno de los paralelos terrestres y en sentido opuesto al de la rotación de la tierra, conociendo la longitud total de ese paralelo en km (ya que no todos los paralelos tienen igual longitud), se puede determinar la cantidad <u>x</u> de días que demora la persona en dar la vuelta a la tierra, dividiendo la longitud total <u>L</u> en km del paralelo entre 24V, siendo <u>V</u> la velocidad lineal en km por hora de la persona.

$$x = \frac{L}{24V}$$

Después de hallar el valor de x se puede determinar la duración del día solar por la fórmula ya conocida:

$$\text{Ts} = \frac{x}{x-1}$$

b) Si la persona se desplaza por mar o por tierra en una dirección que no coincide con ninguno de los paralelos terrestres, se puede hallar la componente de su velocidad en km por hora sobre alguno de dichos paralelos y determinar la cantidad x de días que demora la persona en dar la vuelta a la tierra por la fórmula $x = \frac{L}{24V}$, tomando como L la longitud del paralelo seleccionado y como V la componente (la proyección) de la velocidad en km por hora de la persona sobre ese paralelo, la cual tendrá signo negativo si el sentido de esa componente de la velocidad coincide con el de la rotación de la tierra y signo positivo en el caso contrario.

c) Un razonamiento similar al anterior, en lo referente a la proyección de la velocidad de la persona sobre uno de los paralelos terrestres, se puede aplicar si la persona le da la vuelta a la tierra viajando por el aire.

A continuación se presenta un ejemplo en el que se conoce la velocidad lineal de la persona, así como la dirección y el sentido de recorrido.

EJEMPLO:

¿ Cuál será la duración del día solar de una persona que le da la vuelta a la tierra siguiendo la dirección de la línea del ecuador y en sentido inverso al de la rotación de la tierra, con una velocidad lineal promedio (por mar y por tierra) de 100 km/h, conociendo que la longitud de la línea del ecuador es aproximadamente de 40054 km?

SOLUCIÓN:

La cantidad de días en darle la vuelta a la tierra es:

$$x = \frac{L}{24V} = \frac{40054}{24.100} = \frac{40054}{2400} \approx 16{,}69$$

La persona se demora, aproximadamente, 16,69 días en darle la vuelta a la tierra.

La duración del día solar es:

$$\text{Ts} = \frac{x}{x-1} = \frac{16{,}69}{16{,}69-1} = \frac{16{,}69}{15{,}69} \approx 1{,}0637$$

Los días solares de la persona son, aproximadamente, de 1,0637 días de 24 horas, lo que equivale a 25,5288 horas; o sea, a 25 horas, 31 minutos y 44 segundos.

Obsérvese que si la persona contara los días por los días solares; o sea, por el transcurrir de los días y las noches que en realidad ella percibe, al concluir la vuelta a la tierra tendría un día de atraso con relación al calendario normal. Sus días solares exceden en más de hora y media a las 24 horas de un día normal, por lo que al transcurrir 16,69 días de 24 horas; para la persona habrán transcurrido, aproximadamente, 15,69 días solares de 25,5288 horas.

5. El concorde es un tipo de avión de pasajeros que alcanza una velocidad lineal de unos 2160 km/h. Si este avión volara en sentido inverso al de la rotación de la tierra, siguiendo la dirección de la línea del ecuador y pudiera disponer de suficiente combustible para mantenerse más de 18 horas seguidas volando, podría dar la vuelta a la tierra en menos de un día.
Si volara a ras de la tierra (lo cual es imposible, naturalmente) podría recorrer las 40054 km que mide la línea del ecuador en 18,543 horas, lo que equivale a 18 horas, 32 minutos y 35 segundos.
Si volara a 19 km. de altura sobre el nivel del mar (lo cual es normal en este tipo de avión), siguiendo la dirección de la línea del ecuador, su órbita alrededor de la tierra tendría una longitud de 40173,16 km. y necesitaría 18,598 horas para darle la vuelta a la tierra, lo que equivale a 18 hora, 35 minutos y 53 segundos.
El valor absoluto de la velocidad de rotación de este avión alrededor de la tierra, siguiendo la dirección mencionada, es mayor que la velocidad de rotación de la tierra. Dicho de otra manera: el módulo de la componente de la velocidad lineal del avión sobre la línea del ecuador sería superior al módulo de la velocidad lineal de los puntos fijos sobre la superficie terrestre situados en la línea del ecuador. Como consecuencia de la rotación de la tierra, la velocidad lineal de estos puntos fijos situados sobre la línea de ecuador es de 1668,9 km./h, mientras que la componente sobre la línea del ecuador terrestre de los 2160 km./h de velocidad lineal del avión a 19 km. de altura sobre el nivel del mar es de 2153,67 km./h.
Curiosamente, el horario solar de una persona que viajara en este tipo de avión (en la dirección de la línea del ecuador y en sentido inverso al de la rotación de la tierra), tendría una variación lenta y esa variación sería en sentido antihorario. El avión podría despegar a una hora determinada, mantenerse varias horas volando, y al aterrizar en otro punto bien distante, por el horario solar, que sería la hora normal en ese otro punto, sería más temprano que cuando el avión despegó.

El tiempo en días en dar la vuelta a la tierra sería:

$$x = \frac{L}{24V} = \frac{40054}{24.2153{,}67} = \frac{40054}{51688{,}08} \approx 0{,}7749$$

El avión demoraría 0,7749 días en dar la vuelta a la tierra, lo que equivale, aproximadamente, a 18,598 horas, tal como se había obtenido anteriormente.

La duración del día solar sería: Ts = $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{0{,}7749}{0.7749-1} = \dfrac{0{,}7749}{-0{,}2251}$

Ts = -3,44

El día solar para las personas que viajaran en el avión tendría una duración de 3,44 días de 24 horas y sería recorrido en sentido antihorario; las horas solares irían disminuyendo.

Supóngase que uno de estos aviones despega desde un punto situado sobre la línea del ecuador a las 8 A.M., y le da la vuelta a la tierra siguiendo una velocidad idéntica a la que fue considerada anteriormente; es decir, con igual módulo, igual dirección e igual sentido. ¿Cuándo llegará nuevamente al punto del cual partió?.

SOLUCIÓN:

Si se analiza desde el punto de vista de una persona que haya permanecido en tierra firme, cercana al lugar de partida del avión, al transcurrir las 18,6 horas que tarda aproximadamente el avión en dar la vuelta a la tierra, para esa persona serán las 2,6 A.M.; o sea, las 2 horas y 36 minutos A.M. de día siguiente.

Por otra parte, para una persona que viaje en el avión, las horas solares irán disminuyendo a razón de 0,2907 horas solares por cada hora normal de 60 minutos. Entonces, durante las 18,6 horas que dura el vuelo, el horario de esta persona habrá disminuido en 5,4 horas; por lo que llegará a las 2,6 A.M., lo que equivale a las 2 horas y 36 minutos A.M., pero, aparentemente, del mismo día en que partió.

¿En qué radica, realmente, esa diferencia aparente de un día que se produce entre ambos análisis?

En realidad el avión llega a las 2 horas y 36 minutos A.M. del día siguiente al de su partida. Lo que sucede es que, cuando el avión cruza la línea donde se inicia la zona horaria del meridiano de Greenwich, en el calendario terrestre serán 23 horas más tarde que antes de cruzarla, por lo que, a los efectos de dicho calendario, el avión pasará a estar en el día siguiente al de su partida, aún cuando la persona que viaje en el avión tal vez no perciba ese cambio de día.

Para mayor precisión en el análisis anterior resulta conveniente hacer la siguiente aclaración:

Si en los instantes inmediatos anteriores al cruce del avión por la línea donde se inicia la zona horaria del meridiano de Greenwich la hora estuviera entre las 12 A.M. y la 1 A.M., pero sin llegar exactamente a la 1 A.M., entonces, en los instantes inmediatos posteriores a dicho cruce, el avión estaría en el mismo día del calendario en que estaba antes de cruzarlo, pero 23 horas más tarde. En cualquier otro horario que no esté incluido en el intervalo de tiempo anterior, al cruzar la línea mencionada el avión pasará a estar, según el calendario, en el día siguiente al que estaba antes de cruzarlo.

OBSERVACIÓN:

Si el concorde disminuyera su velocidad y mantuviera una velocidad lineal de 1673,88 km/h, volando a 19 km. de altura y en la misma dirección y sentido considerados anteriormente, tendría una velocidad de rotación igual a la de la tierra y en sentido inverso. Se mantendría, entonces, siempre en el mismo horario solar.

BIBLIOGRAFÍA.

-Ausubel, D. Y otros.: "Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo". Editorial Trillas, México. 1997.

-Ballester, S. y otros.:"Metodología de la Enseñanza de la Matemática". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1992.

-Ballester, S. "La sistematización de los conocimientos matemáticos". PROMET. La Habana. 1999.

-Campistrous, L. Y Rizo, C.: "Aprende a resolver problemas matemáticos". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1996.

-Hernández, R.: "Elaboración del concepto de integral definida". Revista científica del área de estudios sobre Educación Superior. Universidad de Matanzas. Cuba. 1998.

-Hernández, R.: "Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto". Tesis de doctorado. Matanzas. Cuba. 2000.

-Hernández, R.: "La aplicación de los conceptos matemáticos en la solución de problemas".IV Evento Internacional "La Enseñanza de la Matemática y la Computación". Matanzas. Cuba. 2000.

-Jungk, W. "Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1981.

-Mazarío, I.: "La resolución de problemas en la Matemática I y II de la Carrera de Agronomía". Tesis de doctorado. Matanzas. Cuba. 2002.

-Polya, G.: "¿Cómo plantear y resolver problemas?". Editorial Trillas. C. de México. 1986.

-Santos, L.M.:"La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas". Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.1994.

-Schoenfeld, A.: "Ideas y tendencias en la resolución de problemas". Talleres gráficos EDIPUBLI, S:A: Buenos Aires. 1991.

-Talízina, N.F.: "Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior".Departamento de estudios para el perfeccionamiento de la Educación Superior. Universidad de la Habana, Ciudad Habana. 1984.

-Torres, P. "Didácticas cubanas en la enseñanza de la Matemática". PROMET. La Habana. 1999.