LAS FUNCIONES DIDACTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

Dr. Reinaldo Hernández Camacho.
Profesor Titular de Matemática de la Universidad de Matanzas.
Doctor en Ciencias Pedagógicas.

Matanzas, 2004.

LAS FUNCIONES DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Introducción

El éxito o el fracaso de una clase está condicionado por una variedad considerable de factores. Estos factores se manifiestan tanto en el momento de la clase, como en etapas anteriores a ella y están unos relacionados con el profesor, otros con los estudiantes y otros con la situación de enseñanza en el sentido más amplio; es decir, considerando también todas las situaciones ambientales y materiales que pueden intervenir.

Ahora bien, en el período en que se desarrolla la clase como tal, es de vital importancia la armonía y la unión que pueda lograr el profesor entre todos los elementos del proceso docente educativo que objetivamente existan en su clase. Para lograr esta interrelación armoniosa y llevar a cabo felizmente la clase, el profesor debe conocer los diferentes pasos didácticos en que puede ser dividida una clase. Cada uno de estos pasos desempeña un rol significativo en el logro de los objetivos y son en conjunto como una gran cadena con sus diferentes eslabones, por lo que debe velarse por la calidad de cada uno de los eslabones, para que no se quiebre la cadena.

Los pasos didácticos a los cuales se ha hecho referencia se denominan funciones didácticas.

Clasificación de las funciones didácticas

Las funciones didácticas, como partes integrantes del proceso de enseñanza aprendizaje, se clasifican en:

a) La motivación.
b) La orientación hacia el objetivo.
c) El aseguramiento del nivel de partida
d) La elaboración del nuevo contenido.
e) La fijación.
f) El control y valoración del rendimiento.

Los nombres de las funciones didácticas son bastante elocuentes de por sí e indican en qué consisten cada una de ellas. Pero, usted, como profesor, cuando está planificando sus clases o cuando las está desarrollando con sus estudiantes ¿tiene siempre en cuenta el cumplimiento de cada uno de estos pasos didácticos?. Si la respuesta es afirmativa existe una gran probabilidad de que sus clases se desarrollen con un elevado nivel pedagógico. Si la respuesta es negativa sería muy útil para usted y para sus alumnos que comience a tenerlas en consideración lo antes posible.

Es oportuno destacar que en una sola clase de Matemática no tienen que estar presentes todas las funciones didácticas. En realidad esto ocurre muy raras veces. Aunque la motivación y la orientación hacia el objetivo no deben faltar nunca en una clase.

Para ilustrar cómo se pueden desarrollar las diferentes funciones didácticas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, en este trabajo se incluyen ejemplos con contenidos matemáticos de la enseñanza media y de la enseñanza superior. Esto se hace por las siguientes razones:

- Para que el trabajo tenga aplicación en una esfera más amplia.
- Para facilitar la interpretación de las funciones didácticas, cuando se ejemplifica con contenidos de la enseñanza media, que deben resultar de más fácil comprensión para un mayor número de profesores.
- Para suplir, en alguna medida, la carencia de materiales didácticos que aborden el tratamiento de las funciones didácticas con contenidos matemáticos del nivel superior.

. Se analizarán ahora detalladamente cada una de las funciones didácticas.

LA MOTIVACIÓN

Se entiende por motivación a la intención de provocar en el estudiante la realización consciente y deseada de una actividad. Los profesores conocen la significación que tiene para el aprovechamiento académico de un estudiante, el interés personal que éste manifieste por la apropiación de los conocimientos y la espontaneidad y el deseo con que se entregue a las tareas. De igual forma se conoce el resultado nefasto de la falta de estas condiciones. Si una cosa debe estar clara es la necesidad que tiene el profesor de lograr que sus alumnos sientan interés por la apropiación del contenido que se les esté impartiendo.

Para que un alumno esté motivado es requisito indispensable que sienta que el trabajo que está realizando es razonable y necesario. El alumno debe comprender que existe la necesidad de aprender ese contenido, que es útil en algún sentido el dominio del mismo. Después debe reconocer que éste no forma parte de su caudal de conocimiento actual. Con esto, están creadas las condiciones para que se produzcan contradicciones internas entre los conocimientos alcanzados y las nuevas demandas de conocimientos que se plantean, y este será el motor impulsor para que se manifieste el interés por el aprendizaje. Luego, es una tarea del profesor lograr que se produzca esta secuencia en que el alumno interiorice la necesidad del trabajo y se creen en él los deseos de enfrentarlo.

En Matemática, además de motivarse la necesidad de resolver un problema, debe motivarse también la forma de realizar la actividad, la vía que debe seguirse para resolver el problema de la forma más razonable. El alumno debe estar convencido de que la forma escogida es correcta y las más adecuada.

Esto es comparable con la siguiente situación de la vida práctica:
Supóngase que es necesario convencer a un grupo de personas sobre la necesidad de chapear un jardín escolar y se logra su aceptación, pero es posible que después se requiera convencerlos de la necesidad de realizar esa

actividad, con guataca y no con machete, porque se desea encanterar algunas plantas.

La motivación puede efectuarse relacionando el contenido de estudio con situaciones de la vida práctica que rodean a los estudiantes o bien relacionando el nuevo contenido con otros de la propia asignatura que ya los alumnos conocen. La primera de estas formas resulta más objetiva para el estudiante, pero su aplicación en Matemática no es siempre posible y en la mayoría de las ocasiones se hace necesario hacer uso de la segunda forma.

El procedimiento a seguir en este caso es variable y depende lógicamente de las características del contenido. A veces se pueden establecer analogías con contenidos anteriores. Si, por ejemplo, ya los alumnos conocen que las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo suman siempre 180º, se les puede plantear la interrogante de que si existirá siempre un valor fijo para la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo. También, si ya los estudiantes conocen un conjunto de propiedades que caracterizan a todos los problemas que puedan ser modelados mediante la derivada de una función real en un punto, se les puede preguntar si existirá, de manera semejante, otro conjunto de propiedades que caractericen a su vez a todos los problemas que puedan ser modelados mediante una integral definida.

En ocasiones, el nuevo contenido puede verse como una generalización de contenidos anteriores. Por ejemplo, la introducción de exponente negativo, puede verse como una generalización de exponente natural que ya el alumno conoce.
Los problemas de optimización de funciones de varias variables pueden verse como una generalización de los problemas de optimización de funciones de una variable que ya fueron estudiados en clases precedentes.

Existen además otras formas de concebir esta relación, tales como la justificación de una mayor utilidad o facilidad para el trabajo con la aplicación de los nuevos contenidos con respecto a otros anteriores. Por ejemplo, al estudiar la regla de L' Hopital se puede motivar resaltando su gran aplicabilidad en el cálculo de límites de funciones de formas muy variadas, en contraposición con otros procedimientos que se aplican en situaciones más específicas, tales como los limites fundamentales trigonométrico y algebraico, la regla de Leibniz, las equivalencias entre infinitésimos, los diferentes órdenes de magnitud entre infinitos e infinitésimos, etc.

En la introducción de un nuevo contenido, a veces es posible utilizar la inversión de un problema conocido, que como caso típico tiene los recíprocos de teoremas.

Se puede motivar también exponiendo cuáles fueron las causas que provocaron el surgimiento del contenido. Qué situaciones objetivas, que no se habían podido resolver matemáticamente hasta ese momento, fue posible resolverlas después con la aplicación del nuevo contenido. Quién o quiénes fueron sus descubridores; qué dificultades tuvieron que enfrentar. Si es posible dar algunos detalles de las biografías de sus descubridores que puedan resultar interesantes para los estudiantes. Todo esto contribuye además al componente educativo de la clase.

Es evidente que, la motivación y la orientación hacia el objetivo, aunque desde el punto de vista conceptual difieren notablemente, en su manifestación en la clase están íntimamente relacionadas y, generalmente, cuando interviene una está también implícita la otra.

ORIENTACIÓN HACIA EL OBJETIVO

Seguramente muchos han tenido la oportunidad de presenciar en alguna ocasión, ya sea como observador o como estudiante, cómo un profesor está realizando una gran disertación sobre el contenido de una clase, mientras los alumnos permanecen sumidos en la mayor incomprensión, sin la más remota idea del significado de los pasos y de los objetivos que persigue el profesor en cada uno de ellos; mientras los alumnos ignoran totalmente qué es lo más importante y qué es lo secundario, qué es lo que se espera de ellos y cuál es el camino que se está empleando para obtenerlo. Esto es comparable a vendar los ojos a una persona y trasladarlo en esas condiciones hasta un lugar desconocido para él y una vez llegando al lugar quitarle las vendas. ¿Podrá esa persona realizar el recorrido sólo es otra ocasión?. Parece que no.

Es de gran importancia que el alumno tenga conciencia plena de lo que se está elaborando y de la utilidad del camino que se está empleando, para que su mente no divague, para que pueda participar activamente en la elaboración del nuevo contenido.
La orientación hacia el objetivo no significa ni mucho menos que al comienzo de la clase se realice la lectura de los objetivos, empleando una fraseología que contiene seguramente palabras relacionadas con los nuevos contenidos y que para los alumnos es como si les estuvieran hablando en otro idioma. Con eso no se obtienen muchos resultados. La cuestión está en emplear un vocabulario que sea comprensible al alumno (sin dejar de ser científico) y que realmente lo oriente, le sirva de guía para que sepa siempre, en cada momento de la clase, qué se está haciendo, para qué se está haciendo y por qué se está haciendo así.

La orientación hacia los objetivos no es una tarea específica del inicio de la clase, es una tarea a cumplimentar en todo el desarrollo de la misma. Siempre que se esté realizando una actividad el alumno debe conocer cómo se hace y por qué se hace. Además, cuando se inicia una unidad, se debe brindar a los alumnos una información sobre los objetivos fundamentales que deben lograrse en esa unidad.

Es bueno aclarar que para que el profesor pueda ofrecer una correcta orientación hacia los objetivos, es imprescindible que él mismo tenga un buen dominio de los objetivos del programa.

En estas orientaciones no es suficiente enunciar el contenido del objetivo, sino que debe precisarse el nivel al cual se pretende llegar. Por ejemplo, se puede informar a los estudiantes que en la presente clase se van a realizar operaciones combinadas con números racionales, pero sería mucho mejor si se les aclara que en los ejercicios se van a emplear números fraccionarios y números decimales y que generalmente constarán de dos o tres operaciones en cada caso. De manera similar, se puede informar a los estudiantes que en la presente clase se pretende que ellos desarrollen habilidades en el cálculo de integrales definidas. Pero esa información podría precisarse aún más si se añade que en el cálculo de dichas integrales se hará necesario la aplicación de los diferentes métodos de integración que han sido estudiados y que uno de los principales objetivos de la clase es que los estudiantes logren identificar el método de integración conveniente, además de efectuar el proceso de integración. Esto les da una visión más amplia a los alumnos y una orientación más precisa.

No obstante lo dicho anteriormente, no debe caerse en el error de anticipar los resultados, pues esto puede ir en detrimento del interés de los estudiantes. Por ejemplo, no sería adecuado decir: "En la clase de hoy vamos a estudiar un teorema que establece que el volumen de un ortoedro se calcula a través de la fórmula V=a.b.c", si es que uno de los objetivos de la clase es que los alumnos deduzcan esa fórmula por sí mismos. O que se dijera: "Las propiedades que caracterizan a todos los problemas que pueden ser modelados mediante la derivada de una función real en un punto son las siguientes:" (y que se enunciaran esas propiedades), si uno de los objetivos que se proponen en la clase es que los estudiantes vayan deduciendo esas propiedades hasta conformar la caracterización general.

ASEGURAMIENTO DEL NIVEL DE PARTIDA

Consiste en la creación de las condiciones previas necesarias que deben poseer los alumnos para poder enfrentar exitosamente el nuevo complejo de materia. Esto es algo en lo que el profesor debe meditar cuidadosamente en la etapa de la preparación de la clase.

El profesor debe conocer el nivel real de partida que tienen sus alumnos y el nivel de partida que necesitan para lograr los objetivos propuestos. Conociendo esto debe encauzar su trabajo hacia el logro del nivel de partida ideal reactivando los conocimientos esenciales que así lo requieran.

Esta reactivación puede hacerse explícitamente en algunas clases de repaso que se consignan para ese fin al comienzo de determinadas unidades, o bien al inicio de la clase de nuevo contenido. Por lo general ambas formas pueden combinarse estando en dependencia de la valoración que haga el profesor.

En muchas ocasiones se escucha a un profesor expresando su inconformidad porque la asimilación del contenido por parte de sus estudiantes no se corresponde con el esfuerzo que él realizó en la impartición de su clase, pero ¿habrá tenido en cuenta ese profesor el aseguramiento del nivel de partida, o sea, garantizar que sus alumnos recuerden y dominen los contenidos que ya les fueron impartidos y que resultan indispensables para elaborar la nueva materia, antes de desarrollar el contenido nuevo de su clase?. Si esto no se cumple es equivalente a querer levantar un edificio sin echar primero los cimientos. Es fácil comprender que si, por ejemplo, un alumno no domina los productos, por grande que sea el esfuerzo que se realice para enseñarlo a dividir, ese esfuerzo está condenado irremediablemente al fracaso, porque en el proceso de la división es necesario realizar multiplicaciones, si no sabe multiplicar no puede aprender a dividir. Lo mismo ocurre si se quiere que los estudiantes aprendan a determinar los puntos de extremos locales de funciones de variable real, sin que los estudiantes hayan desarrollado las habilidades necesarias para la derivación de funciones. Evidentemente eso no se podrá lograr, porque en el procedimiento habitual para determinar dichos puntos se requiere hallar las derivadas de esas funciones.

Aunque a primera vista pudiera parecer exagerado, es sin embargo una realidad, que casi la totalidad de los contenidos nuevos que se elaboran en Matemática están en mayor o menor medida relacionados con otros contenidos que ya los alumnos han recibido; sólo que en muchas ocasiones ni siquiera el profesor se percata de ello. Afortunadamente, no es tan difícil evadir los errores de esta índole. Simplemente, cuando el profesor esté preparando un nuevo contenido, no debe olvidar nunca hacerse las siguientes preguntas: ¿En cuáles de los contenidos, que ya el estudiante conoce, yo debo basarme para elaborar el nuevo contenido?. ¿Qué actividades previas debo realizar para garantizar que esas bases existan realmente?. Por supuesto, tienen que hacerse las preguntas y darse las respuestas correctas, de lo contrario no tendría éxito el interrogatorio.

Es bueno destacar que existen aspectos en cuanto a las condiciones previas no tan específicamente de la asignatura, pero que inciden también en el aprovechamiento académico y que requieren tratarse a largo plazo. Algunos ejemplos de ellos son: el grado de madurez en la actividad mental, la actitud frente al aprendizaje, hábitos, conducta, etc.

ELABORACIÓN DEL NUEVO CONTENIDO.

Para la elaboración de los nuevos contenidos debe analizarse siempre la posibilidad de relacionarlos con otros contenidos que ya el alumno conozca. Los contenidos que son asimilados en forma aislada, sin formar parte de ningún contexto más amplio, son muy susceptibles de ser olvidados.

Los contenidos y ejemplos que se desarrollen en la clase deben ser cuidadosamente seleccionados como esenciales. No es aconsejable atiborrar a los estudiantes con exceso de explicaciones de hechos secundarios que ellos mismos pueden descubrir después. Esto dificulta el proceso de generalización y de orientación hacia los objetivos fundamentales.

Es importante que los alumnos tengan la posibilidad de participar activamente en la elaboración del contenido. Se siente más amor por lo que nosotros mismos hemos ayudado a construir.

La presentación de la nueva materia, debe hacerse en forma precisa y asequible para el estudiante, de forma que permita a éste formarse representaciones claras del contenido. Estas representaciones deben tener un ordenamiento lógico para que los alumnos pueden formarse conceptos claros. Una clase debe tener una buena concatenación; en su estructura las partes deben ir entrelazadas y cada una de esas partes debe desarrollarse en el momento justo en que le corresponda. Si en una clase deben cumplimentarse varios objetivos, el orden no puede ser seleccionado al azar. Cuando se esté planificando la clase, se debe analizar cuál es el orden más lógico. Por otra parte, los alumnos deben tener la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos en la práctica para obtener mayor conciencia de la utilidad de los mismos. De esta manera se puede evitar la pregunta que a veces hacen los estudiantes al profesor: ¿y esto para qué sirve en la práctica?.

Se analizarán ahora algunas formas de proceder para la elaboración del nuevo contenido en la asignatura Matemática.

Estas formas de actuación, que se analizarán, se nombran principios heurísticos o procedimientos heurísticos.

Algunos principios heurísticos

a) Medir y probar sistemáticamente.
b) Aplicación del principio de la movilidad.
c) Inducción incompleta.
d) Consideración de casos especiales o casos límites.
e) Analogía.
f) Generalización.
g) Reducción a problemas ya resueltos.

Se presentarán a continuación algunos ejemplos donde se pongan de manifiesto estos principios heurísticos:

a) Medir y probar sistemáticamente.

Ejemplo1:

Se quiere elaborar, conjuntamente con los alumnos, el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Para ello se deja como tarea en la clase anterior, construir dos triángulos cualesquiera, medir sus tres ángulos interiores y sumar esas amplitudes en cada caso. Los resultados obtenidos por los alumnos se encontrarán próximos a 180º; de ahí se llega a la suposición del enunciado del teorema.

Ejemplo 2:

Al final de la clase anterior a la clase en la cual se estudiarán los problemas de optimización de funciones de una variable real, se pueden seleccionar 4 ó 5 estudiantes, de los mejores del aula, y entregarles a cada uno de ellos una hoja cuadrada, todas de igual tamaño, y pedirles que realicen la siguiente tarea extraclase :

a) Recortar un cuadradito en cada uno de los vértices de la hoja, de manera que los cuatro cuadraditos sean de igual tamaño.
b) Formar una cajita en forma de ortoedro con lo que quedó de la hoja.
c) Calcular el volumen de la cajita resultante.
d) Traer para la próxima clase la cajita conjuntamente con el cálculo de su volumen.

Después que cada uno de los estudiantes halla presentado el resultado de su trabajo, se destaca que los volúmenes obtenidos no son iguales y que se desea investigar de qué tamaño deben ser los cuadraditos que se recorten para obtener el mayor volumen posible de la cajita. De esta manera introducimos el nuevo contenido y estamos además realizando la motivación de la clase.

b) Aplicación del principio de la movilidad.

Ejemplo1:

En una clase se quiere elaborar el teorema de los ángulos alternos entre paralelas. El profesor traza dos rectas paralelas en el pizarrón y fija un punto B en la paralela inferior. A continuación utiliza la regla como si fuera la recta secante que pasa por el punto B, y la va moviendo para que los alumnos vayan observando que en la medida en que uno de los ángulos alternos disminuye o aumenta, al otro le sucede lo mismo. Los alumnos pueden entonces suponer que los ángulos alternos entre paralelas son congruentes.

Ejemplo 2:

Para obtener el primer criterio de suficiencia para la existencia de extremos locales de una función real de una variable, basado en el análisis del signo de la primera derivada en una vecindad reducida de un punto crítico, se traza el gráfico de una función que tenga un máximo y un mínimo local. Se sitúa una regla como si fuera una recta tangente a la curva en un punto situado a la izquierda del punto crítico x_o y se va moviendo la regla manteniéndola en la posición de una recta tangente hasta pasar por el punto x_o y continuar por otros puntos situados a la derecha del punto crítico. Teniendo en cuenta que la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto, se llega a la conclusión de que si $f^{!}(x) > 0$ para valores próximos y a la izquierda del punto crítico x_o, y además $f^{!}(x) < 0$ para valores próximos y a la derecha de x_o, entonces x_o es un punto de máximo local. Por un procedimiento similar se puede inducir el criterio para la existencia de un punto de mínimo local.

c) Inducción Incompleta.

Este principio se basa en la observación de una serie de hechos particulares, los cuales llevan a suponer que lo mismo que ha sucedido en esos casos particulares se cumplirá también para la generalidad de los casos posibles.

Ejemplo1:

Se quiere encontrar una fórmula que permita calcular con rapidez la suma de los primeros n números pares:

Se observa que: ***2+4 = 6 =2.3***

2+4+6 =12=3.4

2+4+6+8=20=4.5

2+4+6+8+10=30=5.6

De la observación de estos resultados particulares se induce que la suma de los primeros n números pares es: 2+4+6+...+2n = n(n+1)
Es bueno hacer notar que esto es solamente una suposición. Su demostración matemática puede realizarse por el método de inducción completa.

Ejemplo2:

Se presentan dos tipos de problemas, ya conocidos por los estudiantes, cuyas soluciones pueden obtenerse mediante el cálculo de integrales definidas:
El cálculo del área bajo una curva.
El cálculo de la distancia recorrida por un móvil a partir de su velocidad con respecto al tiempo.
Se destacan un conjunto de propiedades esenciales que son comunes a ambos tipos de problemas y se induce que esas propiedades son también comunes a todos los tipos de problemas que pueden modelarse mediante una integral definida. De esta manera, mediante inducción incompleta, se obtiene una caracterización general de todos los tipos de problemas que pueden modelarse mediante una integral definida. Aunque debe aclararse a los estudiantes que esa caracterización está demostrada mediante un teorema matemático.

d) <u>Consideración de casos especiales o casos límites</u>.

Ejemplo1:

Se desea deducir una fórmula para calcular el área total de un cubo, cuando ya los alumnos conocen que el área total de un ortoedro se calcula a través de la fórmula A_t=2ab+2ac+2bc. Como el cubo es un caso especial de un ortoedro que cumple que a=b=c, sustituyendo en la fórmula las variables b y c por a, se obtiene: A_t=2.a.a+2.a.a+2.a.a=6a² y de esa manera se obtiene la fórmula deseada.

Ejemplo2:

Después que se ha presentado la fórmula para la derivada del cociente $\frac{f}{g}$ de las funciones derivables f y g (con g (x) ≠ 0). Es decir, $\left(\frac{f}{g}\right)^! = \frac{f^! g - fg^!}{g^2}$, se puede obtener una fórmula para la derivada de $\frac{1}{g}$, (con g (x) ≠ 0), como caso especial de la derivada de un cociente, obteniéndose que $\left(\frac{1}{g}\right)^! = -\frac{g^!}{g^2}$.

e) <u>Analogía.</u>

Ejemplo1:

Se desea introducir la fórmula para calcular el volumen de un cono. Los alumnos conocen que la fórmula para calcular el volumen de una pirámide es $V=1/3\ A_B.h$. El profesor hace notar la analogía que existe entre la pirámide y el cono con relación al prisma y al cilindro circular recto respectivamente. De ahí se induce que el volumen del cono es:
$V=1/3\ A_B.h.=1/3\ \pi.r^2h$.

Ejemplo 2

Cuando se van a estudiar las integrales iteradas en el cálculo de integrales múltiples, es conveniente establecer la analogía que existe entre este contenido y las derivadas parciales. Se recuerda a los estudiantes que para determinar la derivada parcial con respecto a una variable x_i de una función de varias variables, se deriva la función con respecto a esa variable x_i y se consideran como constantes todas las otras variables. De forma análoga, para calcular la integral iterada con respecto a una variable x_i, de una función de varias variables, se integra la función con respecto a esa variable x_i y se consideran las restantes variables como constantes.

f) <u>Generalización</u>

Ejemplo1:

Se conocen las leyes de las potencias para exponentes enteros cualesquiera y se pregunta a los estudiantes si estas leyes se cumplirán también cuando los exponentes son números racionales en general, introduciéndose así las leyes de las potencias para exponentes racionales.

Ejemplo2:

Cuando se comienzan a calcular derivadas parciales, después de haberse dado la definición correspondiente, puede preguntarse a los estudiantes si será posible aplicar aquí las tablas de derivadas inmediatas que ya ellos conocen para las funciones de una variable. La respuesta es afirmativa, porque al calcular la derivada parcial de una función con respecto a una variable x_i , en ese momento se está derivando la función con respecto a una sola variable, ya que las restantes se consideran constantes. Lo mismo ocurre con la aplicación de las reglas de derivación. De esta manera se generalizan las tablas y las reglas de derivación que ya eran conocidas por los estudiantes para las funciones de una variable, al cálculo de derivadas parciales en funciones de varias variables.

g) <u>Reducción a problemas ya resueltos</u>

Ejemplo1:

Para deducir el teorema relativo a la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo, basta con trazar una diagonal al cuadrilátero descomponiéndolo en dos triángulos. Como los ángulos interiores del cuadrilátero son iguales a la unión de los ángulos de los dos triángulos, el problema se reduce a la suma de los ángulos interiores de cada triángulo, lo cual ya el alumno conoce.

Ejemplo2:

Cuando se estudian los problemas de extremos condicionados, el método más usado es el de los multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, en muchas ocasiones es posible despejar una variable en la función de enlace y sustituirla en la función objetivo, con lo que se puede reducir el problema a otro de extremos libres, que ya es conocido por los estudiantes, y que en ocasiones (aunque no siempre), facilita la determinación de los extremos condicionados.

LA FIJACIÓN

En el proceso de aprendizaje hay tres fases esenciales: la comprensión, la interiorización (según Galperin transcurre en cuatro etapas) y la fijación.

Para apropiarse de un nuevo conocimiento, hay, en primer lugar, que comprenderlo. Ahora bien, contrariamente a lo que piensan algunos profesores noveles, esto es necesario pero no suficiente. Como diría Talízina: “No es lo mismo comprender que aprender”. De nada vale que un profesor logre hacerse entender perfectamente en la exposición de un contenido si no logra que los estudiantes interioricen y fijen ese contenido. Muchos en algún momento han experimentado esa realidad.

A veces un profesor se incomoda porque sus alumnos no dominan objetivos de grados anteriores que les resultan necesarios, pero estas situaciones hay que enfrentarlas con espíritu realista. Esto no significa, en todos los casos, que esos alumnos no dominaron en algún momento esos objetivos. Es posible que muchos de ellos lo hayan olvidado, porque el olvido es un proceso característico en todos los seres humanos y el trabajo del profesor con la fijación hay que desarrollarlo a corto plazo y a largo plazo. Dicho de otra manera, de la misma forma que el profesor se preocupa por reactivar los conocimientos que componen el programa de estudio del curso, para que los alumnos mantengan el dominio de los objetivos fundamentales, ha de preocuparse también, cuando sea necesario, por reactivar conocimientos de grados anteriores. Si los contenidos dentro de un mismo semestre se olvidan, ¿cómo no se van a olvidar los de unos años para otros ?.

En Matemática se agudizan estas situaciones por la constante relación que tienen los nuevos contenidos con otros de grados anteriores.

Para lograr la fijación de los conocimientos existen las siguientes formas especiales de trabajo: Ejercitación, profundización, aplicación, sistematización y repaso.

La **ejercitación** es la ejecución de una actividad en forma repetida y tiene como objetivo fundamental crear habilidades y hábitos en la actividad. Por ejemplo, cuando se quiere que los alumnos adquieran habilidad en la solución de ecuaciones fraccionarias, se desarrolla una ejercitación en la que se resuelvan varias ecuaciones, con el objetivo de que los alumnos fijen y automaticen el procedimiento a seguir.

Para desarrollar habilidades en el cálculo de integrales definidas se realiza una ejercitación en la que se resuelvan ejercicios variados, donde los estudiantes tengan que reconocer la necesidad de aplicar uno u otro método de integración de forma independiente.

Para que la ejercitación cumpla su contenido el profesor debe tener en cuenta que los ejercicios tienen que estar graduados en orden de dificultad y en correspondencia con el nivel de asimilación de los estudiantes. Los ejercicios deben ser variados para que la clase no se torne monótona. Debe tratarse que al inicio de la clase los alumnos tengan éxito en su trabajo para que les sirva de estímulo. Además, es bueno señalar que no solamente es importante la cantidad de ejercicios que se resuelvan, si no fundamentalmente la calidad y el dominio con que se resuelvan.

La **profundización** consiste en tratar de adquirir conocimientos más profundos sobre un contenido dado. Esta variante de trabajo con la fijación es la que más similitud tiene con la elaboración de una nueva materia. Los problemas planteados no deben resultar demasiado difíciles para que no conspiren contra el interés de los alumnos.

Ejemplo1:

Después que los estudiantes han adquirido ciertas habilidades en la aplicación de la fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado, se les plantea la tarea de resolver ecuaciones fraccionarias y con paréntesis que conduzcan a ecuaciones de segundo grado. Igualmente se les plantea resolver ecuaciones literales de segundo grado. De esta manera se profundiza en el concepto de ecuación de segundo grado y en los métodos de solución de la misma.

Ejemplo2:

Después que los estudiantes hayan desarrollado habilidades en la determinación de extremos locales de funciones de dos variables se les plantean algunos problemas donde se requiera determinar los extremos locales de funciones de tres variables, ampliándose así la gama de posibles problemas a resolver de esta índole.

En la **aplicación** (algunos la consideran como una función didáctica y no como parte de la fijación), el objetivo fundamental es capacitar a los alumnos para aplicar los conceptos y contenidos matemáticos en situaciones de la vida práctica o relacionados con otras asignaturas. La resolución de problemas es una tarea típica dentro de esta actividad. De gran importancia resulta desarrollar habilidades en los estudiantes para la aplicación de los conocimientos, por cuanto, en sus vidas futuras como trabajadores deben estar en posibilidad de aplicar lo que han aprendido. Esto permite, además, a los estudiantes valorar la utilidad de la Matemática en la vida, no pensar en la Matemática como en un conjunto de conceptos que no tienen utilidad, sino como algo útil y valioso. Los problemas que se seleccionen deben ser reales y lo más relacionados posible con el medio ambiente y los intereses de los educandos. Deben contribuir al desarrollo de las convicciones morales de los estudiantes.

Como ejemplo se puede citar cuando los estudiantes interiorizan un conjunto de propiedades esenciales que caracterizan a todos los problemas que pueden modelarse mediante una derivada y otro conjunto de propiedades que caracterizan a su vez a todos los problemas que pueden modelarse mediante una integral definida, y a continuación se les comienzan a presentar problemas para que ellos decidan si cumplen o no alguno de esos conjuntos de propiedades, y si se puede, por tanto, resolver o no cada problema aplicando alguno de esos contenidos matemáticos.

En la **sistematización** se conciben diferentes contenidos como componentes de un sistema de conocimientos. Es decir, se buscan las propiedades comunes a varios contenidos y se integran en conceptos más amplios. Estos contenidos se comparan para encontrar analogías y diferencias con el propósito de hacer generalizaciones. En la sistematización se desarrollan importantes operaciones lógicas, tales como la comparación, la generalización, el análisis y la síntesis. La sistematización permite ordenar y estructurar los conocimientos en una forma lógica. Una buena sistematización contribuye grandemente a la fijación de los conocimientos. Los conceptos aislados se olvidan con mucha más facilidad que si están integrados en un sistema, porque entonces, recordar una parte cualquiera del sistema permite generalmente recordarlo en su totalidad.

Ejemplo1:

En la unidad de Geometría del Espacio se estudian los cuerpos: Prisma, Cilindro Circular Recto y Cilindro Anular Recto. Cuando se van estudiando estos cuerpos por separado se introduce una fórmula para calcular el volumen de cada uno de ellos. Para el prisma $V=A_B.h$, para el cilindro circular recto $V=\pi r^2h$ y para el cilindro anular $V= \pi(r^2_1-r^2_2).h$. Después de estudiadas estas fórmulas por separado, se debe hacer notar a los alumnos que aunque en apariencia son bastante diferentes, se apoyan las tres en un mismo principio básico, que es el producto del área de la base por la altura, sólo que cada una de ellas tiene una base diferente, pero que los alumnos han aprendido ya a calcular en etapas anteriores. Esto facilita grandemente la memorización y da una idea más clara y comprensible de las fórmulas; se presentan más lógicas.

Ejemplo 2:

Cuando se estudian las funciones de varias variables se calculan derivadas parciales de funciones simples de dos ó mas variables, de funciones compuestas, de funciones implícitas y de sistemas de funciones implícitas. Después que se han desarrollado cada uno de estos contenidos por separados, es necesario realizar una sistematización, donde se destaquen las características que permiten identificar cuándo se está en presencia de cada una de las formas anteriormente señaladas, precisando cuáles son sus semejanzas y diferencias y cuál es el procedimiento que debe seguirse para calcular la derivada parcial en cada caso. De esta manera se integran e interrelacionan todas las variantes anteriores en un sistema Lo mejor es, al inicio de una clase, plantear un conjunto de ejercicios que contengan todos los tipos de derivadas anteriores y procurar que los estudiantes traten de identificarlas, para que logren precisar cuáles son las características que distinguen a cada tipo.

Por último se tiene el **repaso**. Este es un concepto más amplio que puede contener como casos particulares a cualquiera de las formas anteriormente expuestas. El repaso tiene como objetivo fundamental reactivar los conocimientos adquiridos con anterioridad para fijarlos en la memoria.

Se realiza en diferentes situaciones. Está, por ejemplo, el repaso introductorio que se efectúa al inicio de la clase para asegurar el nivel de partida, el repaso ocasional que a veces es necesario hacer durante el desarrollo de la clase; el resumen parcial o final de la clase y la clase de repaso que se planifica al final de una unidad o al final de un semestre.

El repaso se debe efectuar con regularidad y formas variadas. Un primer repaso se puede desarrollar al poco tiempo de impartido el contenido, después se pueden ir realizando con intervalos de tiempos mayores. Hay determinados contenidos en Matemática que necesitan repasarse periódicamente en el nivel medio, tales como: los productos básicos, las operaciones de cálculo con números naturales y con números racionales en notación decimal y fraccionaria. Es un error pensar que se pierde mucho tiempo si se repasa. Por el contrario, la mejor forma de ganar tiempo es repasando lo que el alumno necesita que se le repase. Es claro, deben repasarse solamente los conceptos, generalizaciones, procedimientos de cálculo, etc, que sean más importantes.

Es bueno destacar que todas estas formas de llevar a cabo la fijación, aparecen en general estrechamente relacionadas y en muy raras ocasiones se manifiestan en forma pura.

El profesor debe trabajar con todas estas formas para enriquecer su trabajo pedagógico y facilitar la fijación de los conocimientos de los alumnos y su capacidad para aplicarlos en la práctica.

Control y valoración del rendimiento.

Se entiende por control todo aquello que suministra información a profesores y estudiantes con respecto a la medida en que se han logrado los objetivos.

El control por una parte informa al profesor sobre los resultados de su trabajo, le permite valorar la eficiencia con que ha desarrollado su labor educativa y detectar los fracasos que se hayan producido. De esta forma le sirve de guía para reorientar su trabajo docente en función de solucionar las dificultades existentes. Por otra parte, el control informa a los estudiantes sobre el nivel que han alcanzado en el logro de los objetivos, cuáles son los objetivos que tienen vencido y cuáles no. Así, tienen también éstos la oportunidad de conocer dónde deben profundizar más en sus estudios.

En un sistema de evaluación donde existan evaluaciones sistemáticas, parciales y finales, las actividades de control sistemático cumplen a cabalidad el rol informativo, siempre y cuando se realicen en forma objetiva y se tenga una visión clara de la concepción en que se fundamenta la evaluación.

Los controles sistemáticos constituyen el primer enfrentamiento que los estudiantes tienen con la materia de enseñanza en el plano evaluativo, ofrecen la primera información precisa a profesores y alumnos de la medida en que se han logrado los objetivos propuestos, de cómo y con quién es necesario trabajar nuevamente, qué es lo que en realidad se ha obtenido ya y que falta por obtener aún, con la ventaja de que las dificultades pueden detectarse en forma relativamente inmediata y en pequeñas proporciones, lo cual facilita el trabajo encaminado a resolverlas. Esta es realmente la función principal que desempeñan las actividades de control sistemático.

Los resultados de las evaluaciones parciales muestran en un marco más amplio el nivel alcanzado en relación con los objetivos a lograr en una etapa determinada del curso. También es necesario aquí valorar objetivamente los resultados que se obtengan y trazar un plan que permita ir erradicando las dificultades que aún persistan.

Finalmente en los resultados de las pruebas finales se pone de manifiesto el logro alcanzado por los estudiantes y profesores en el transcurso de todo un semestre.

Ahora bien, para que la evaluación cumpla los objetivos que se persiguen con ella, hay que interiorizar verdaderamente cuál es su función y para qué se realiza. Por ejemplo: En un curso determinado se considera que un alumno debe apropiarse de una serie de conocimientos y desarrollar un conjunto de habilidades para que se pueda valorar que ha vencido los objetivos necesarios y que está en posibilidad de pasar al curso inmediato superior. Para saber si esos objetivos se han vencido o hasta qué nivel se ha logrado esto, se establecen las evaluaciones. Pero téngase en cuenta que lo importante es que los alumnos venzan los objetivos y que para ello disponen de todo el tiempo en que se desarrolla esa etapa evaluativa. Esto quiere decir, que cuando se detecte que un alumno no domina un objetivo importante en cualquier etapa del curso, debe tratarse de remediar esa dificultad lo antes posible para que cuando culmine la etapa haya adquirido el nivel requerido en el vencimiento de los objetivos propuestos. La evaluación es un instrumento para medir el nivel de vencimiento de los objetivos y hay que verla en todo momento en esa su verdadera función. Si se aplica correctamente una evaluación y los resultados no son buenos, significa que los objetivos no se han vencido en la forma deseada y que hay que trabajar nuevamente con ellos para lograrlo. Pero hay algo que es evidente; si la evaluación no es aplicada de una forma correcta no puede emanar de ella información verdadera. Esta visión es necesaria también para entender por qué se evalúa un mismo objetivo en diferentes ocasiones; porque se pretende con esto valorar el grado de desarrollo y profundidad que se ha alcanzado en diferentes etapas y la medida en que se han solucionado las dificultades que se manifestaron en momentos anteriores, así como la solidez de los conocimientos adquiridos.

Dada la importancia que reviste la correcta aplicación de las evaluaciones, se harán algunas sugerencias específicas para su mejor desenvolvimiento:

- Todo lo que incida en la evaluación cualitativa del estudiante tiene que ser cuidadosamente planificado.
- Las evaluaciones se realizarán siempre sobre objetivos importantes de la asignatura.
- Al elaborar un proyecto de prueba, garantizar que su contenido esté en correspondencia absoluta con el nivel de asimilación de los estudiantes.
- Todos los ejercicios que formen parte de una evaluación deben ser resueltos por el profesor antes de ser aplicada la evaluación, para evitar que puedan surgir dificultades imprevistas y para hacer un pronóstico del posible tiempo que necesitarán los alumnos para resolverla, teniendo en cuenta que en un examen de Matemática los estudiantes pueden necesitar como promedio 4 veces el tiempo que necesita el profesor.
- La calificación de un ejercicio evaluativo debe hacerse atendiendo a la importancia de los pasos realizados con respecto a los objetivos que se están midiendo y no en dependencia del grado de dificultad de los pasos.
- Velar por la honestidad con que los estudiantes realicen las actividades evaluativas.
- Los resultados de las evaluaciones deben ser analizados de forma crítica con los alumnos en el tiempo más breve posible. Ellos deben adquirir conciencia de sus logros o fracasos.
- Se estimularán a los estudiantes que hayan obtenido las mejores calificaciones y se resaltarán los logros de otros menos aventajados. En general, se creará un ambiente psicológico estimulante que promueva el interés por la obtención de buenos resultados.

UN EJEMPLO PARA MOSTRAR LA UTILIZACION DE ALGUNAS DE LAS FUNCIONES DIDACTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN EL NIVEL SUERIOR.

En el ejemplo que será desarrollado, se podrá observar la utilización de las primeras funciones didácticas.

Temática:
Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas de algunas funciones elementales. Reglas de derivación.

Objetivos:
Interpretar las definiciones de derivada de una función real en un punto y de función derivada.
Identificar las derivadas de las funciones reales más usadas y las reglas de derivación de la suma, el producto y el cociente de funciones.

MOTIVACIÓN

Una vez que el profesor haya dado a conocer la temática de la clase, puede propiciar que sus estudiantes se sientan interesados, inicialmente, por el aprendizaje del nuevo contenido, comentando acerca de los siguientes aspectos:
-La gran importancia que tiene el nuevo concepto que será estudiado en la clase.
-Quiénes fueron sus descubridores, haciendo una breve reseña de las biografías de éstos, y de las discrepancias que surgieron posteriormente entre ellos, con relación a la primacía del descubrimiento, al igual que entre sus respectivos seguidores.
-Las principales situaciones prácticas que impulsaron el surgimiento del cálculo diferencial:

- El cálculo de la velocidad instantánea de un cuerpo conociendo su desplazamiento con respecto al tiempo.
- La determinación de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.
- La determinación de los máximos y mínimos de una función.

ASEGURAMIENTO DEL NIVEL DE PARTIDA.

(Está en dependencia de cómo se desarrollará la clase)

Es necesario recordar:

- Qué significa el movimiento rectilíneo uniforme y cuál es la fórmula que se utiliza para calcular la velocidad de un móvil que tiene este tipo de movimiento.
- Cómo se calcula la velocidad media de un móvil en un intervalo de tiempo [a,b].
- Cuál es la fórmula que describe el desplazamiento de un cuerpo en caída libre.
- Los aspectos del cálculo de límites que se consideren necesarios, en dependencia de los ejemplos de cálculos de derivadas de funciones, aplicando la definición, que se vayan a desarrollar.

ORIENTACIÓN HACIA EL OBJETIVO

El profesor puede expresar lo siguiente:
El concepto de derivada que será estudiado en la presente clase está estrechamente relacionado con el concepto de división.
La derivada surge por la necesidad de solucionar un conjunto de problemas que bajo determinadas condiciones pueden ser resueltos mediante una división, pero que al variar algunas de esas condiciones ya no es posible resolverlos dividiendo.

Ejemplo:
Cuando un móvil se desplaza con un movimiento rectilíneo uniforme durante un intervalo de tiempo [a,b], los incrementos de su desplazamiento son directamente proporcionales a los incrementos del tiempo, su velocidad es constante en cada punto del intervalo de tiempo [a,b], y esa velocidad puede calcularse mediante una división:

$$V= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S(b)-S(a)}{b-a}$$

Pero, ¿cómo calcular la velocidad de un móvil en un instante de tiempo dado, cuando los incrementos del desplazamiento no son directamente proporcionales a los incrementos del tiempo; es decir, cuando la velocidad no es constante en el intervalo de tiempo?
En la clase de hoy se estudiará cómo resolver este tipo de problemas. Precisamente, el propio proceso de solución de uno de estos problemas, conducirá a la definición de derivada de una función real en un punto. De manera que, lo que se irá haciendo en la primera parte de la clase, será con el objetivo de llegar a la definición de este importante concepto matemático. Después, se comenzarán a estudiar algunos aspectos relacionados con el cálculo de derivadas.

ELABORACIÓN DEL NUEVO CONTENIDO:

Para obtener la definición de derivada de una función en un punto, se partirá de un problema de la vida práctica: El cálculo de la velocidad instantánea de un cuerpo, en caída libre, en un momento dado. En la solución de este problema se aplicarán los principios heurísticos de analogía y de casos límites, destacando la relación existente entre determinados problemas que se resuelven mediante divisiones y otros cuyas soluciones conducen al cálculo de derivadas.
El profesor puede iniciar esta etapa de la clase diciendo:

El problema que será abordado a continuación, y que permitirá arribar al concepto de derivada, es el siguiente:

El desplazamiento de un cuerpo en caída libre, con respecto al tiempo, puede expresarse aproximadamente por la función $S(t)=5t^2$ (más exacto sería $S(t)=4{,}9t^2$), estando S(t) expresado en metros y t en segundos. Determinar la velocidad del cuerpo para t=2.

SOLUCIÓN:
¿Será constante la velocidad de cuerpo?. ¿Podrá obtenerse la velocidad mediante una división?
Evidentemente, la velocidad en este caso no es constante, se va incrementando según va aumentando el tiempo.
La velocidad instantánea del cuerpo para t=2 no puede obtenerse mediante una división. No obstante, se podrían obtener aproximaciones de esa velocidad instantánea, si se calculan las velocidades medias del cuerpo durante diferentes intervalos de tiempo que contengan al punto t=2. Por ejemplo:

En el intervalo [2;6], $V(2)\approx \frac{S(6)-S(2)}{6-2} = \frac{5.6^2-5.2^2}{6-2} = \frac{5(36-4)}{4} = 40$

En el intervalo [2;4], $V(2)\approx \frac{S(4)-S(2)}{4-2} = \frac{5.4^2-5.2^2}{4-2} = \frac{5(16-4)}{2} = 30$

En el intervalo [2;3], $V(2)\approx \frac{S(3)-S(2)}{3-2} = \frac{5.3^2-5.2^2}{3-2} = \frac{5(9-4)}{1} = 25$

En el intervalo [2;2,5], $V(2)\approx \frac{S(2{,}5)-S(2)}{2{,}5-2} = \frac{5.(2{,}5)^2-5.2^2}{2{,}5-2} = \frac{5(6{,}25-4)}{0{,}5} = 22{,}5$

¿Que sucederá con el valor de la velocidad media, si se continúa reduciendo cada vez más la longitud del intervalo de tiempo?.
¿Podrá aplicarse el concepto de límite aquí?

Si se consideran intervalos de tiempo de la forma [2;2+Δt], donde Δt tienda a cero, ¿cómo podría expresarse la velocidad a través del límite?. ¿Qué respuesta podría darse, si se pidiera hacer una estimación de la velocidad en el punto t=2?

Se les irá dando tiempo a los estudiantes para que mediten acerca de las preguntas formuladas, y para que emitan sus respuestas.
En elaboración conjunta, mediante las preguntas y respuestas, se pueden ir obteniendo las siguientes conclusiones:

Es de esperar que cuanto menor sea la longitud Δt del intervalo de tiempo de la forma [2;2+Δt], más próxima estará la velocidad media en ese intervalo, de la velocidad exacta del cuerpo en el instante t=2.
Podría calcularse, entonces, la velocidad del cuerpo en el punto t=2,como:
V(2)= $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{S(2+\Delta t)-S(2)}{\Delta t}$, si es que este límite existe.
En ese caso, a este límite se le denomina la derivada de la función S(t)= $5t^2$ en el punto t=2.

Calculando el límite se obtiene:

V(2)= $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{5(2+\Delta t)^2-20}{\Delta t}$ = $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{5\left[4+4\Delta t+(\Delta t)^2\right]-20}{\Delta t}$ = $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{20\Delta t+5(\Delta t)^2}{\Delta t}$

= $\lim\limits_{\Delta t\to 0}$ (20+Δt)=20

La velocidad del cuerpo en el instante t=2 es de 20 m/s (porque el desplazamiento está dado en metros y el tiempo en segundos).

Puede expresarse también que S′(2)=20, lo cual significa que la derivada de la función S en el punto t=2 es igual a 20.
Es posible, entonces, dar la definición formal de derivada de una función en un punto.

Definición: Derivada de una función en un punto.

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga al punto Xo. Entonces, si existe $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
Este límite se denomina la derivada de la función f en el punto Xo.

A partir de este momento, la clase puede continuar desarrollándose de la siguiente forma:

- Presentar la definición de función derivada.

- Calcular la derivada de la función definida por $f(x)=5x^2$, aplicando la definición estudiada.
- Evaluar esa derivada para x=2, con lo cual se resuelve el mismo problema original de la clase.
- Presentar una tabla con las derivadas de las principales funciones elementales.
- Dar a conocer las principales reglas de derivación.
- Resolver ejemplos, en elaboración conjunta con los estudiantes, donde se utilicen la tabla de derivadas y las reglas de derivación que fueron estudiadas.
- Hacer un resumen de los principales aspectos tratados en la clase.
- Orientar el estudio individual de los estudiantes.

BIBLIOGRAFIA

-Ausubel, D. Y otros.: “Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo”. Editorial Trillas, México. 1997.

-Ballester, S y otros. “Metodología de la enseñanza de la Matemática”. Editorial Pueblo y Educación. Mes. Ciudad de la Habana. 1992.

-Ballester, S. “La sistematización de los conocimientos matemáticos”. PROMET. La Habana. 1999.

-Campistrous, L. Y Rizo, C. “Aprende a resolver problemas matemáticos”. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana. 1996.

-Hernández, R.: “Elaboración del concepto de integral definida”. Revista científica del área de estudios sobre Educación Superior. Universidad de Matanzas. Cuba. 1998.

-Hernández, R. “Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto”. Tesis de doctorado. Matanzas. Cuba. 2000.

-Jungk, W. “Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática”. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1981.

-Mazarío, I. “La resolución de problemas en la Matemática I y II de la Carrera de Agronomía”. Tesis de doctorado. Matanzas. Cuba. 2002.

-Santos, L.M. “La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas”. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.1994.
-Talízina, N.F.: “Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior”.Departamento de estudios para el perfeccionamiento de la Educación Superior. Universidad de la Habana, Ciudad Habana. 1984.
-Torres, P. “Didácticas cubanas en la enseñanza de la Matemática”. PROMET. La Habana. 1999.